ABI 2024

Intensivkurs

Analysis

WILLKOMMEN

... zu Deinem ABI-Intensivkurs **Analysis**

Dein Tutor Niklas

- Mathe-Enthusiast 🤓
- B.Eng. Produktionstechnik
- Konstruktionsingenieur
- Seit 2014 ehrenamtlich in Botswana
- Seit 2019 Online-Mathe-Tutor
  - 1000+ Stunden
  - Matheheld – Producer
  - ABI-Kurse bei Study**Help**

HOCHSCHULE HANNOVER UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

WABCO Mobilizing Vehicle Intelligence

BRÄUTIGAM

matheheld.com SEIT 2013

preply

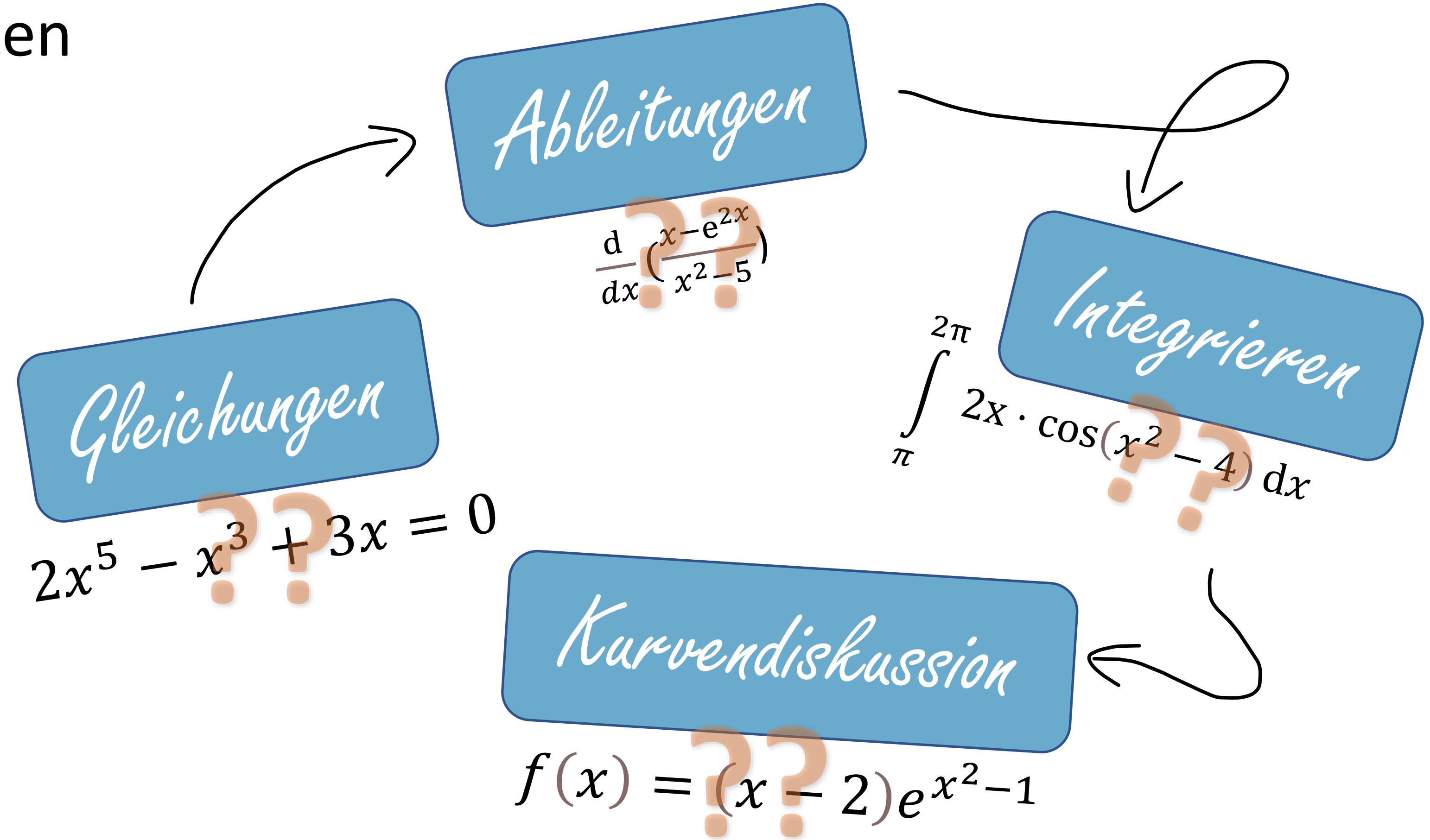
mathe Erfolg.de

StudyHelp

ÜBERSICHT

Ohne Sorge in die Mathe-Abi-Prüfung

- Auffrischung der wichtigsten Themen
- Workshops
- Echte Abi-Aufgaben
- Tipps vom Profi



ZIEL DIESES KURSES

- Übersicht über relevante Themengebiete
- Auffrischung von Grundlagen
- Tipps austauschen
- Aufzeigen deiner Schwachpunkte

GLEICHUNGEN LÖSEN

ABI-Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f an.

??

Gleichungen müssen gelöst werden beim Berechnen von (z.B.) …

- … x-Koordinaten (Stellen), wenn der y-Wert bekannt ist
- Schnittpunkten
- Nullstellen

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

GLEICHUNGEN LÖSEN

✓Frag dich zuerst, was für eine Gleichung du vor dir hast!

Gleichungstyp	→	Lösungsansatz
Gleichungen mit nur einem x	→	Nach x umformen
Quadratische Gleichungen mit linearem und absolutem Glied	→	Mitternachtsformel / p-q-Formel
Nullprodukt | Gleichungen ohne absolutem Glied	→	Ausklammern und Nullprodukt
Gleichungen mit sich wiederholenden Gliedern	→	Substitution
Ganzrational mit absolutem Glied (ab 3. Grad)	→	Polynomdivision
Bruchgleichungen	→	Mit allen Nennern multiplizieren
Wurzelgleichungen	→	Wurzel freistellen und quadrieren
Natürlicher Logarithmus	→	Logarithmusregeln anwenden

1. Gleichungen mit nur einem x

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Nach x umformen

Tipp: Macht die Äquivalenzumformung wirklich **nur** das, was ich möchte?

linear	quadratisch	exponentiell	logarithmisch	trigonometrisch
$3x - 6 = 15$	$2(x-3)^2 - 5 = 3$	$5\mathrm{e}^{-2x-4} = 5$	$2 \cdot \ln(x-4) = 0$	$3\,cos(2\,\pi\,x) - 1 = 0{,}5$

2. Quadratische Gleichungen mit linearem und absolutem Glied

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓ Mitternachtsformel / p-q-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + \text{q} = 0 \ \rightarrow$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$4{,}5x + 3 = 6 - 3x^2$$

3. Nullprodukt | Gleichungen ohne absolutem Glied

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Ausklammern und Nullprodukt

quadratisch	ganzrational	exponentiell	logarithmisch	trigonometrisch
$6x^2 - 3x = 0$	$4x^3 + 4x^2 + 8x = 0$	$2e^{2x} + e^x = 0$	$\ln(x+3) + [\ln(x+3)]^2 = 0$	$\cos^2(2x) - \cos(2x) = 0$

4. Gleichungen mit sich wiederholenden Gliedern

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Substitution

ganzrational	**exponentiell**	**logarithmisch**	**trigonometrisch**
$0{,}5x^4 - 6x^2 + 10 = 0$	$\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x = 12$	$\ln(x-2) + [\ln(x-2)]^2 = 2$	$\cos^2(2x) - \cos(2x) = 6$

5. Ganzrational mit absolutem Glied (ab 3. Grad)

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Polynomdivision

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

- **Erste Nullstelle erraten**
  (wahrscheinlich ganzzahliger Teiler von 6, also 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6)
- **Linearfaktor erstellen und Term durch diesen dividieren**

6. Bruchgleichungen

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Mit allen Nennern multiplizieren

$$\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{24}{x^2-9}$$

7. Wurzelgleichungen

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Wurzel freistellen und quadrieren

$$3\sqrt{2x-1}-4=11$$

8. Natürlicher Logarithmus

Was für eine Gleichung habe ich vor mir?

✓Logarithmusregeln anwenden

$$2 \cdot ln(x) - ln(x+2) = 0$$

$$ln(u \cdot v) = ln(u) + ln(v)$$

$$ln\left(\frac{u}{v}\right) = ln(u) - ln(v)$$

$$ln(u^v) = v \cdot ln(u)$$

$$ln(5x) \;=\; ln(x+3) \;+ ln(2)$$

- **Ergebnisse verifizieren**

ln (a) nur für a > 0 definiert

ABI-Aufgabe

GLEICHUNGEN LÖSEN

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f an.

ABI-Aufgabe

GLEICHUNGEN LÖSEN

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie die Nullstellen von f an.

ABI-Aufgabe

GLEICHUNGEN LÖSEN

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

ABI-Aufgabe

GLEICHUNGEN LÖSEN

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2 - x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.
Geben Sie alle Nullstellen von g an.

ABI-Aufgabe eA

GLEICHUNGEN LÖSEN

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.

An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$ beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

a Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

ABI-Aufgabe eA

GLEICHUNGEN LÖSEN

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren.
Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit $37{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ angenommen.
Bei Temperaturen ab $37{,}9\,^\circ\mathrm{C}$ spricht man von Fieber.

Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 37 + 3t \cdot e^{-\frac{1}{7}t^2}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen nach dem Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $^\circ\mathrm{C}$.
Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Tagen, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

a) Berechnen Sie die Länge des Zeitraumes, in dem die Person Fieber hat.

Geschafft !

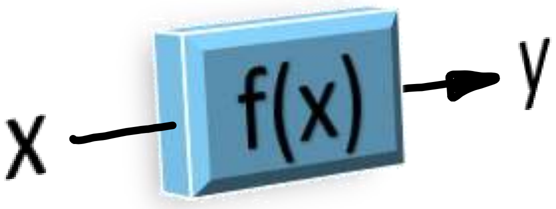
GLEICHUNGEN LÖSEN

Du erkennst jetzt Gleichungen und weißt,

was der richtige Lösungsansatz ist !

FUNKTIONEN

Was ist das und was muss ich wissen?



- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Charakteristische Eigenschaften verschiedener Funktionen
- Einfache Transformationen
- Umkehrfunktion

Der Definitionsbereich

FUNKTIONEN

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ beziehungsweise die Definitionsmenge beschreibt, welche x-Werte in einer Funktion verwendet werden können.

Funktion	Definitionsbereich
Ganzrational z.B. $f(x) = 2x^3+5x$	$\mathbb{R}$
Expontentiell z.B. $f(x) = 3x \cdot e^{2x-1}$	$\mathbb{R}$
Gebrochenrational $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$	$n(x) \neq 0$
Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt[n]{r(x)}$	n gerade, dann $r(x) \geq 0$
Logarithmus $f(x) = \ln(u(x))$	$u(x) > 0$

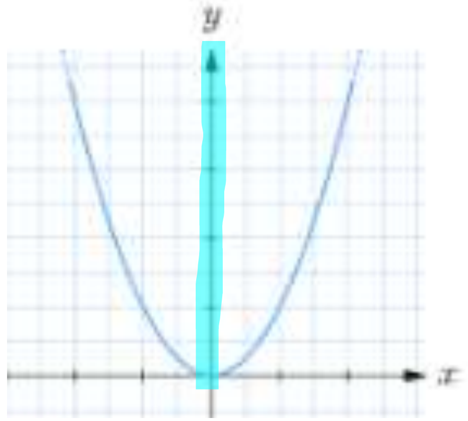
Der Wertebereich

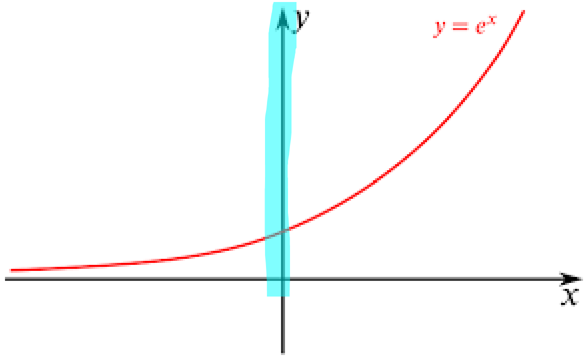
FUNKTIONEN

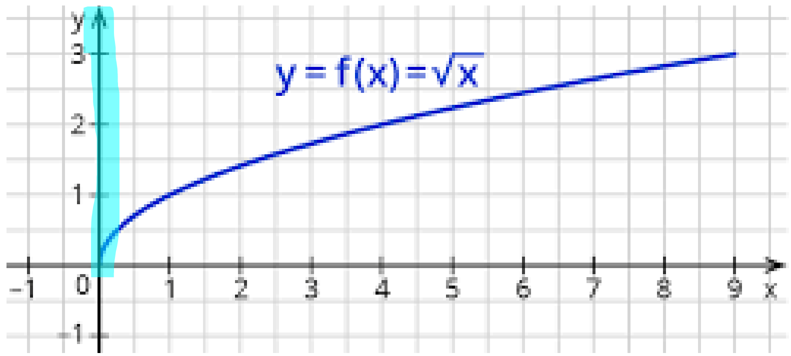
Der Wertebereich $\mathbb{W}$ beschreibt alle y-Werte, welche der Funktionsgraph im Definitionsbereich annehmen kann.

- Gibt es ein globales Minimum oder Maximum?

Beispiele:







Lineare Funktionen $y = m \cdot x + n$ … Geradengleichung

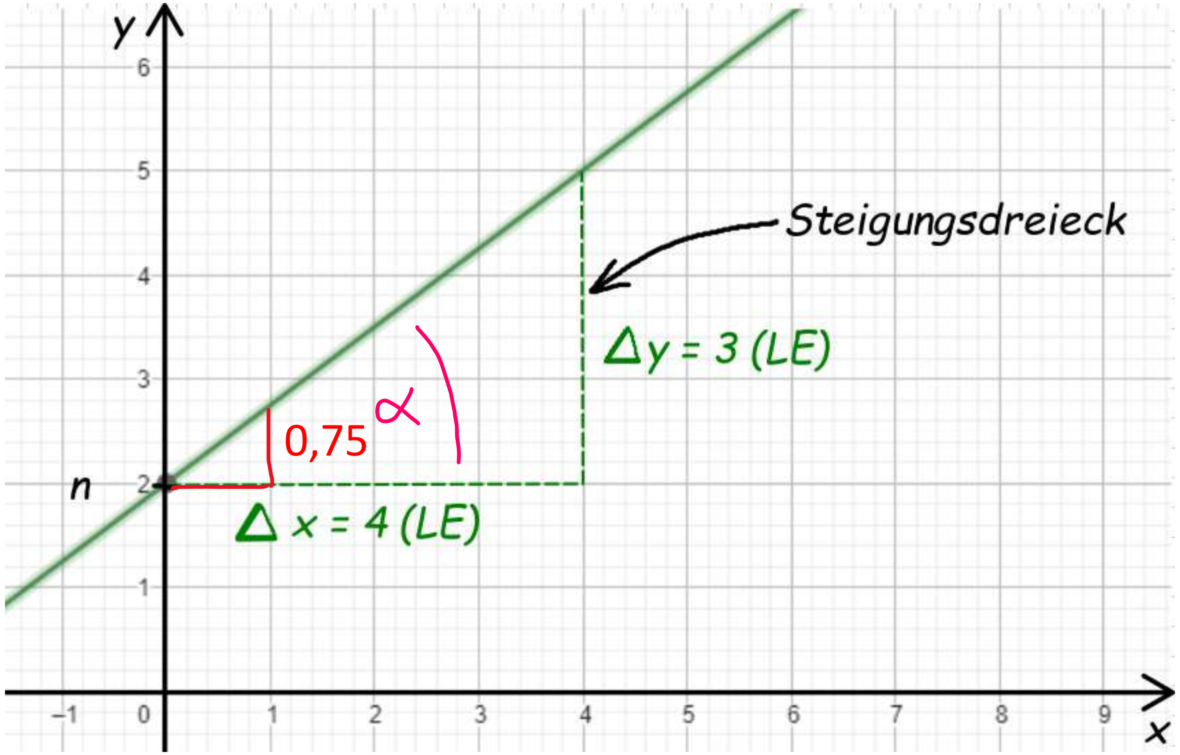
n: y-Achsen-Abschnitt … *Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse*

m: Steigung … *Anstieg des Funktionsgraphen je Abzisseneinheit*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Steigungswinkel:

$$m = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$$



Quadratische Funktionen

Graph: Parabel

Parameter a: *Streckungs- / Stauchungsfaktor*

Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

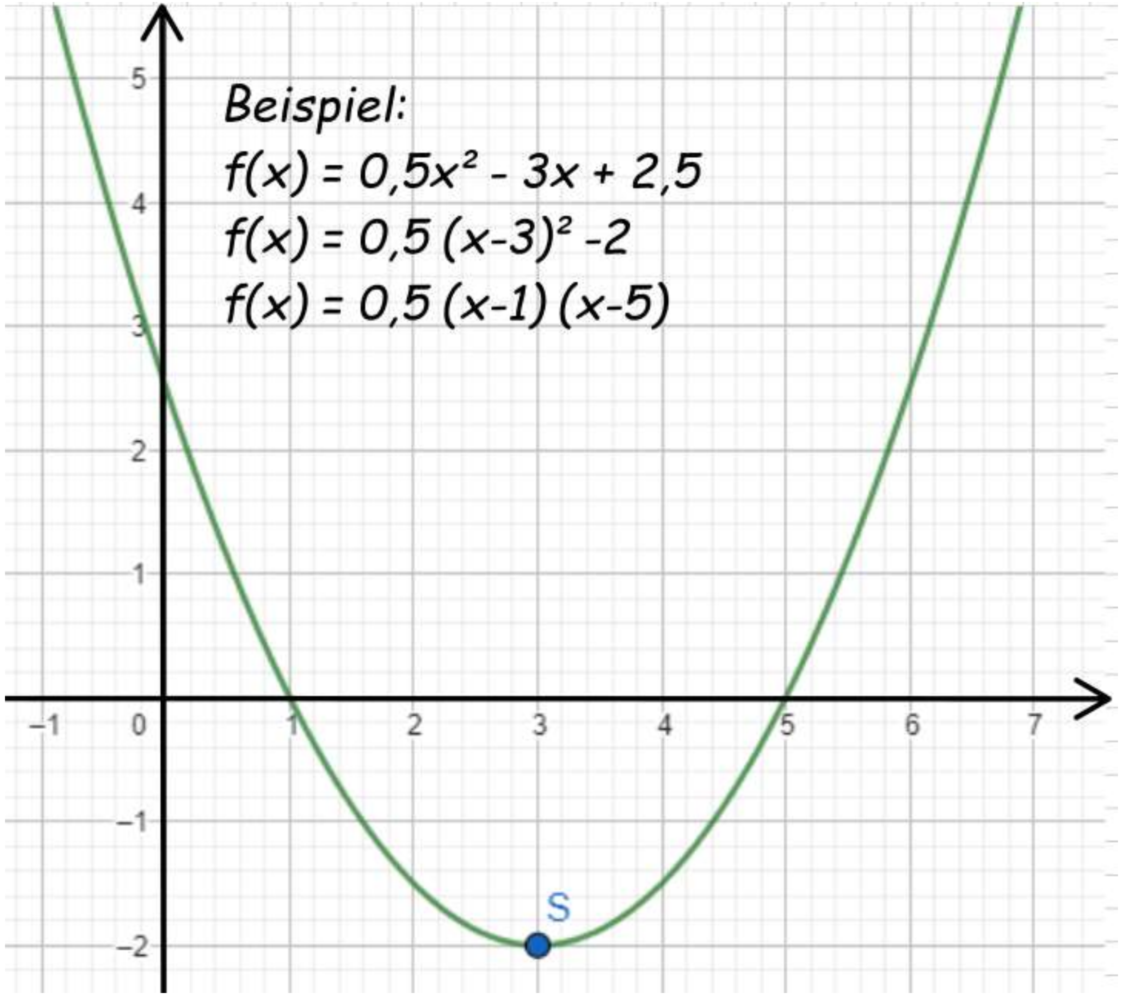
$\rightarrow$ c … *y-Achsen-Abschnitt*

Scheitelform: $f(x) = a(x-d)^2 + \mathrm{e}$

$\rightarrow$ S(*d*|*e*)

Linearfaktoren: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$\rightarrow$ Nullstellen $x_1; x_2$



Charakteristische Eigenschaften

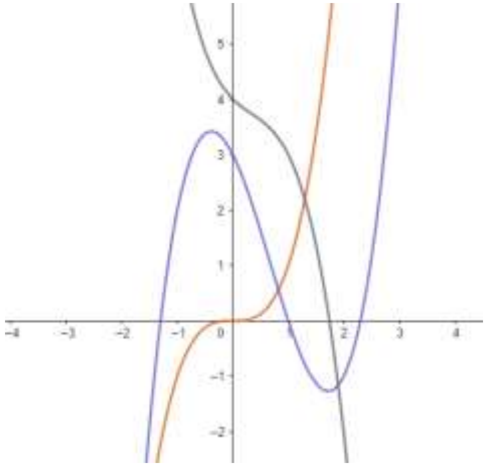
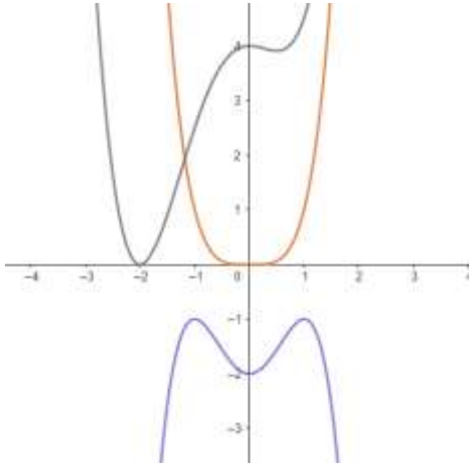
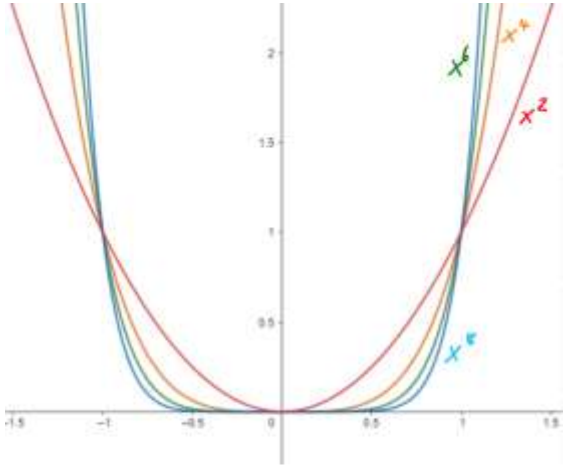
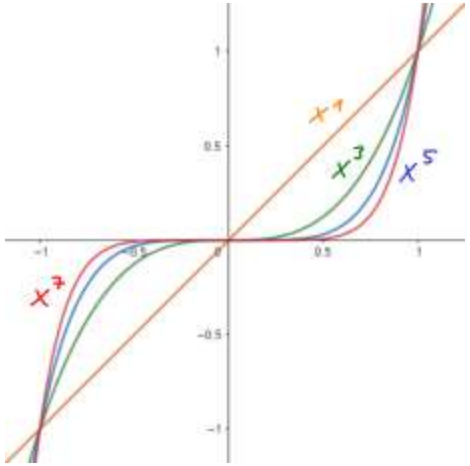
GANZRATIONALE FUNKTIONEN

Ganzrationale Funktionen, Polynomfunktionen

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n, \; n \in \mathbb{N}$$

a_n … absolutes Glied, y-Achsen-Abschnitt

n … Grad der Funktion (= maximale Anzahl an Nullstellen)

n = 3	n = 4	n gerade	n ungerade
			

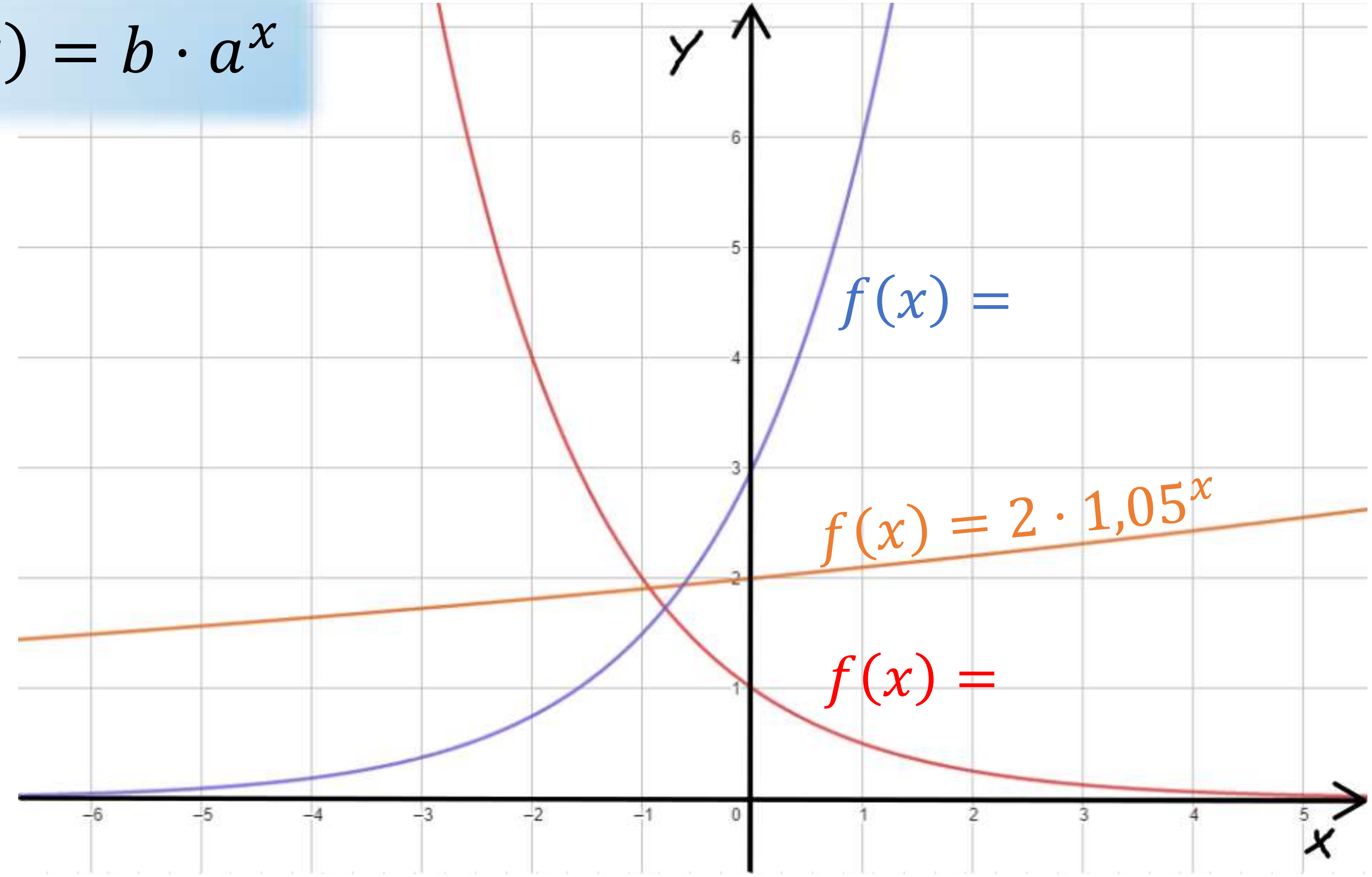
Charakteristische Eigenschaften

EXPONENTIALFUNKTIONEN

Exponentialfunktionen $f(x) = b \cdot a^x$

b … y-Achsen-Abschnitt

a … Wachstumsfaktor $a = 1 \pm \frac{p\%}{100}$



Charakteristische Eigenschaften

EXPONENTIALFUNKTIONEN (E-FUNKTION)

e-Funktion $f(x) = a \cdot \mathbf{e}^{k \cdot x}$

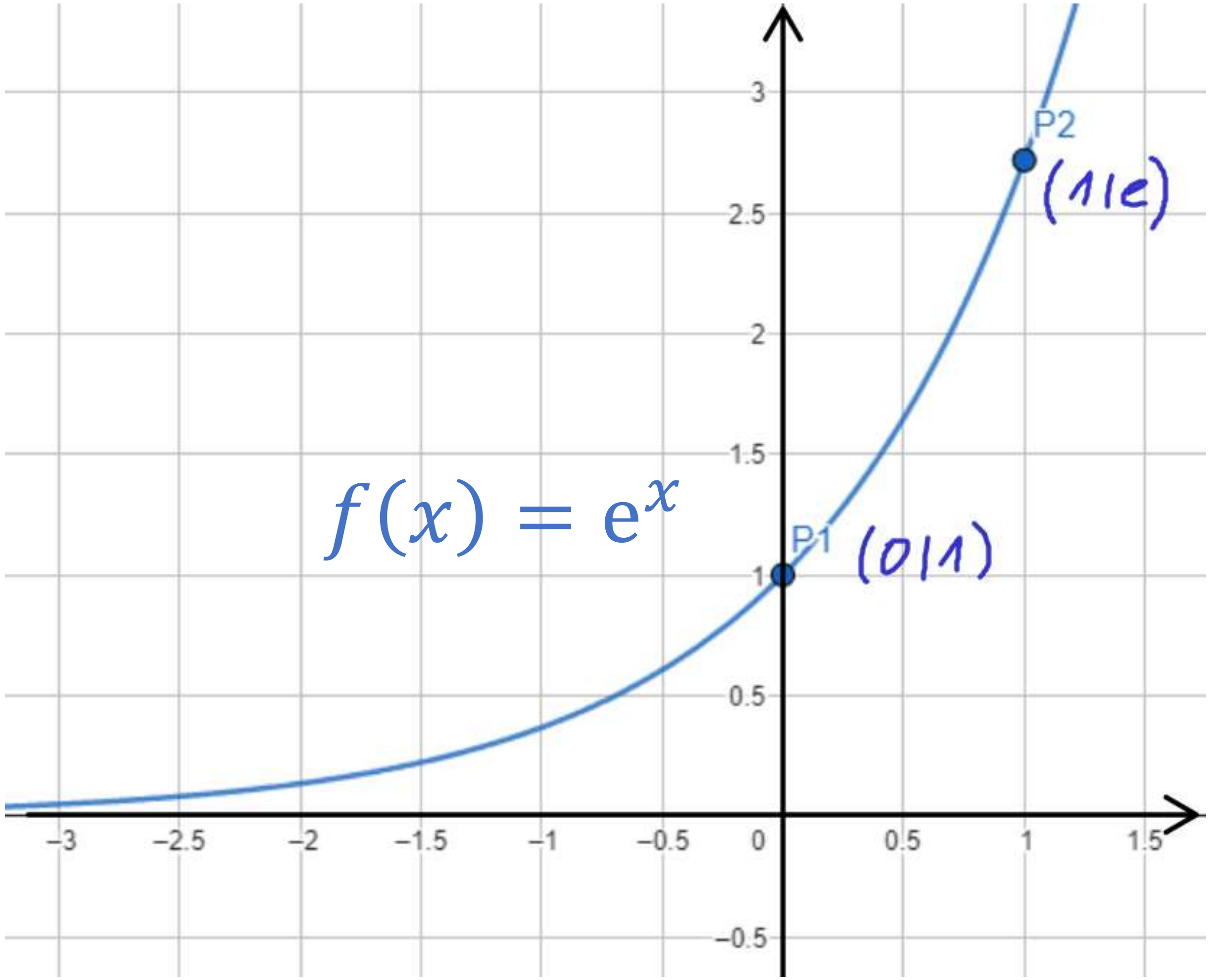
a … y-Achsen-Abschnitt

e … Eulersche Zahl ($e \approx 2{,}71828$)

k … Wachstumsfaktor $k = \ln\left(1 \pm \frac{p\%}{100}\right)$

Besonderheit:

$$f(x) = \mathbf{e}^x \Rightarrow f'(x) = \mathbf{e}^x$$



Charakteristische Eigenschaften

LOGORITHMUS-FUNKTION

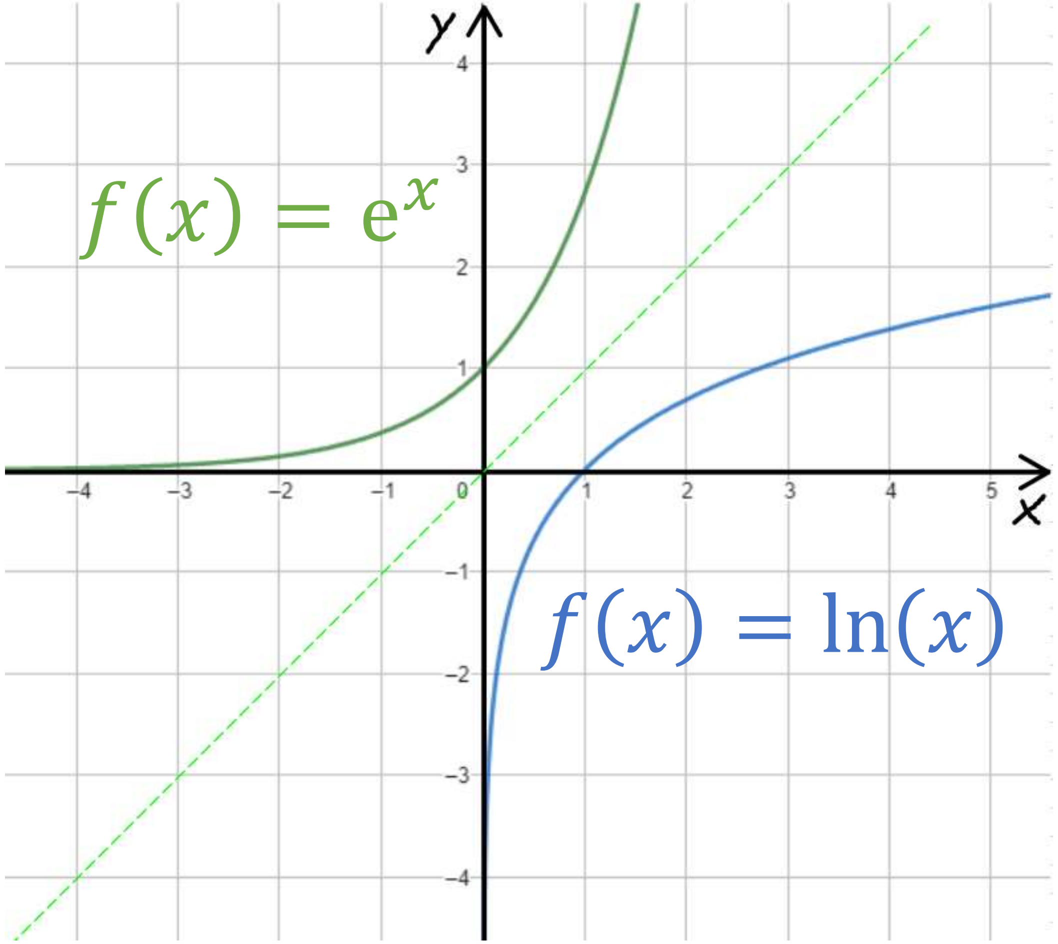
ln-Funktion $f(x) = \ln(x)$

- **Umkehrfunktion der e-Funktion**

$$\boldsymbol{e}^{\ln(x)} = \ln(\boldsymbol{e}^{x}) = x$$

- **Ableitung:**

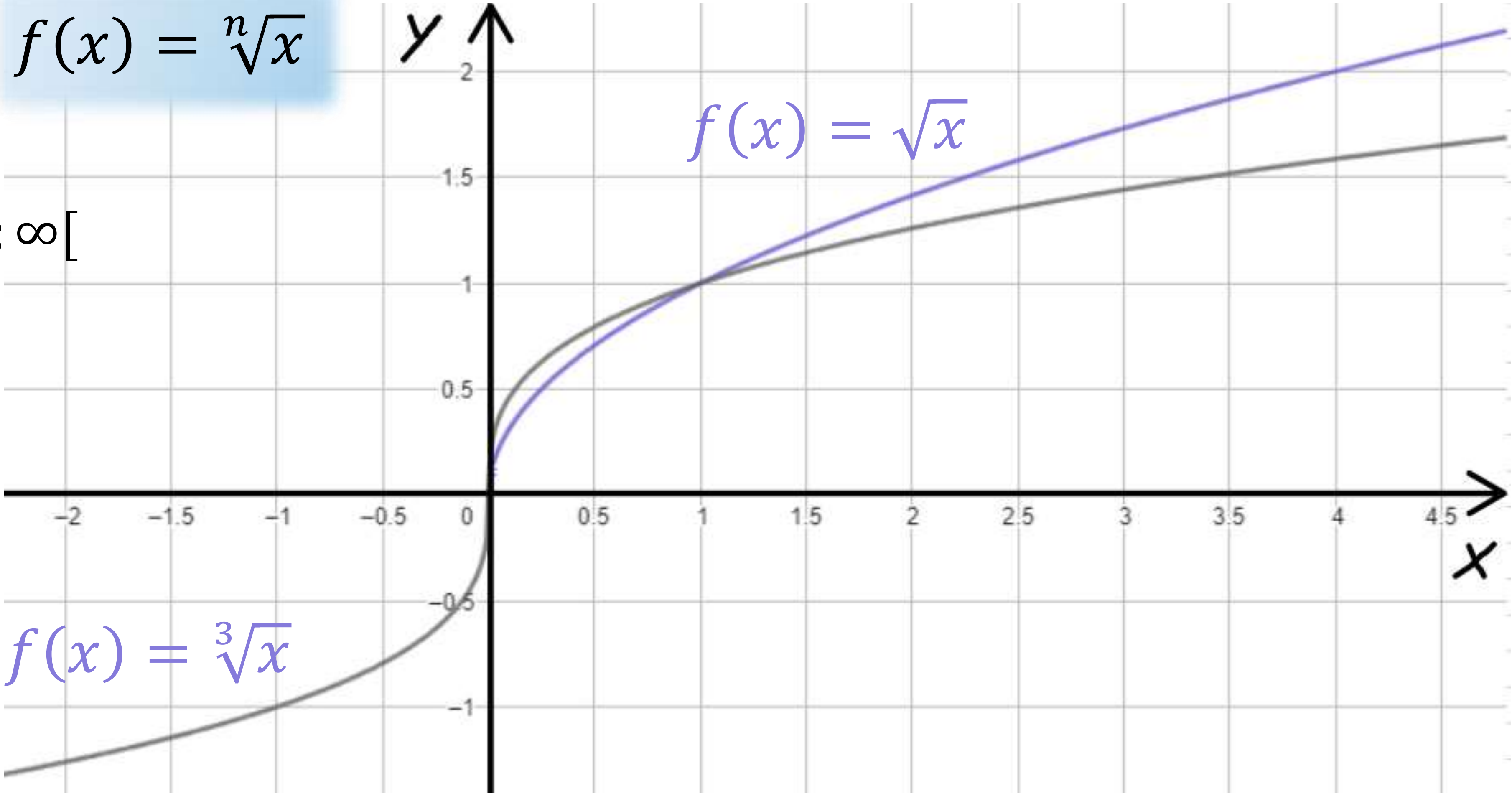
$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$



Wurzel-Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$

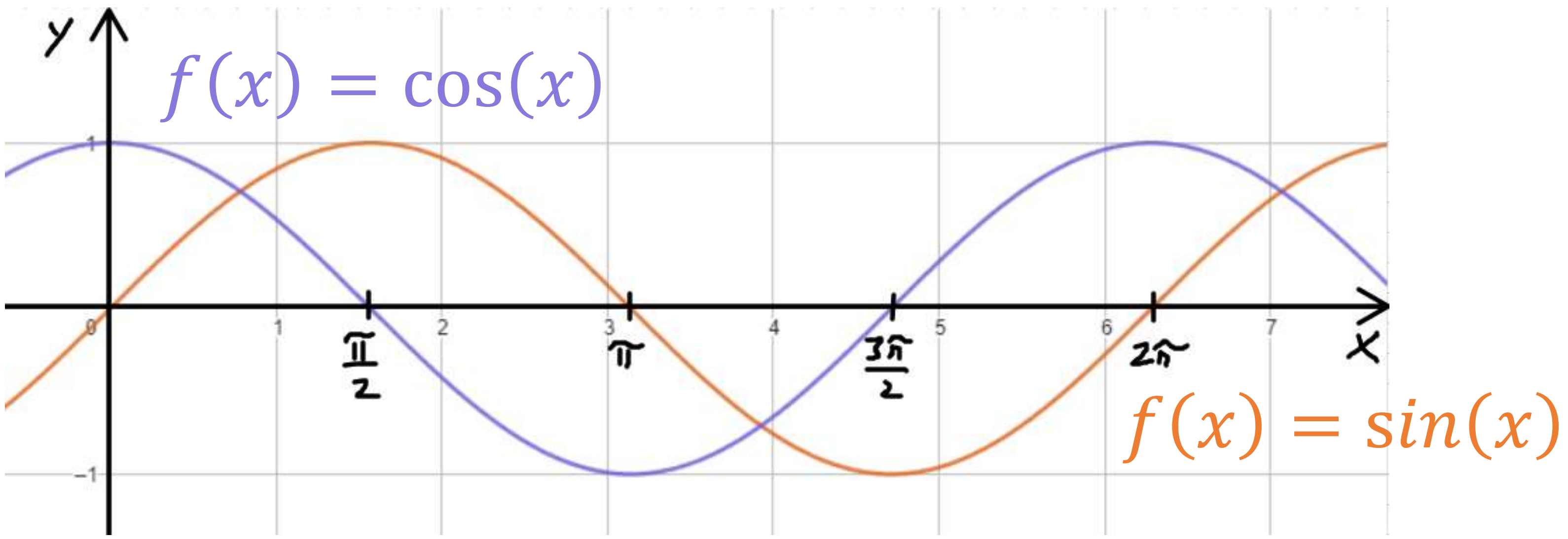
n gerade: $x \in [0; \infty[$

n ungerade: $x \in \mathbb{R}$



sin-Funktion $f(x) = \sin(x)$

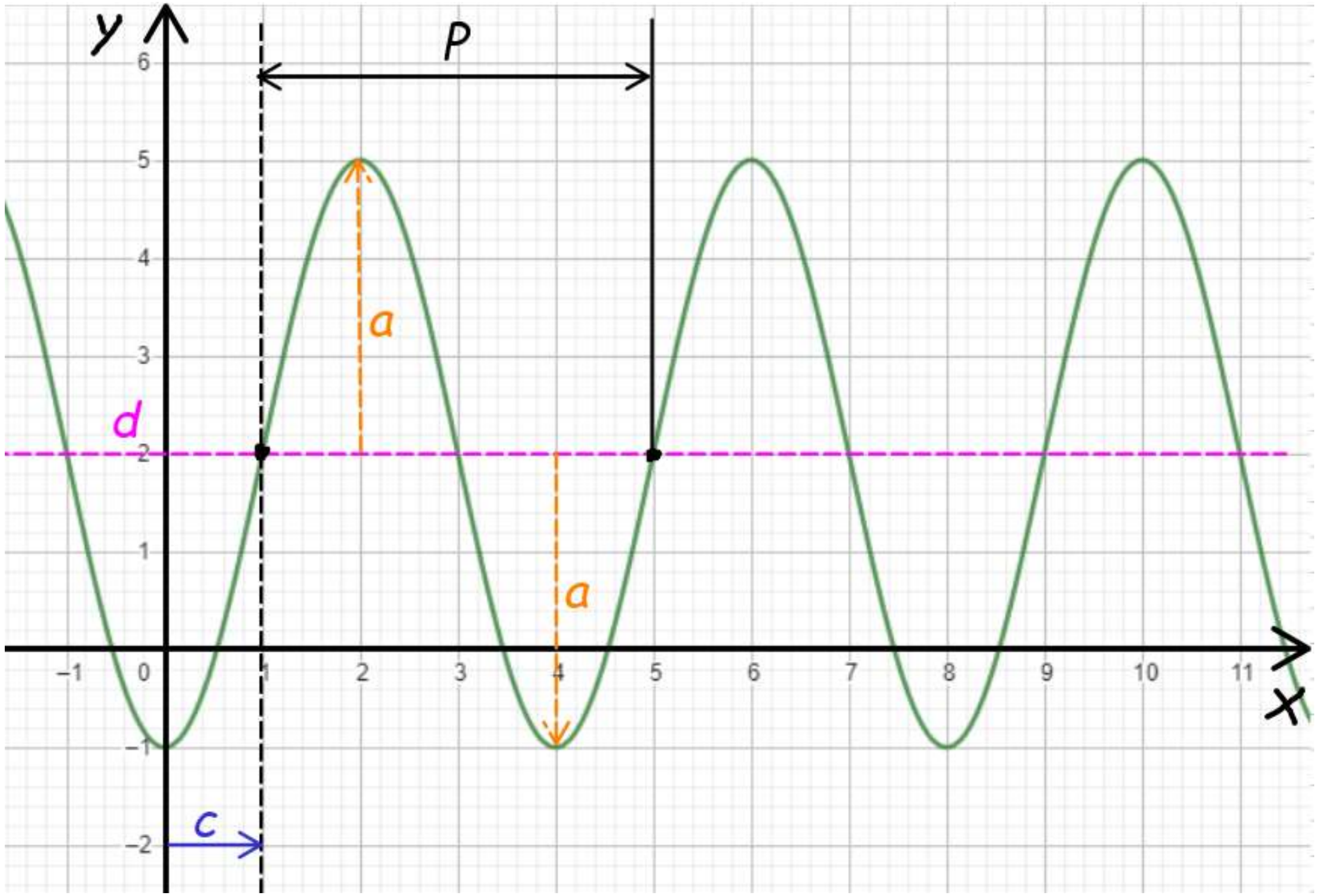
cos-Funktion $f(x) = \cos(x)$



Charakteristische Eigenschaften

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

$f(x) = a \cdot \sin[b(x-c)] + d$	
$a = \dfrac{y_{max} - y_{min}}{2}$	Amplitude
$b = \dfrac{2\pi}{P} \Rightarrow P = \dfrac{2\pi}{b}$	beeinfluss die Periodenlänge
c	horizontale Verschiebung
$d = \dfrac{y_{max}+y_{min}}{2}$	vertikale Verschiebung

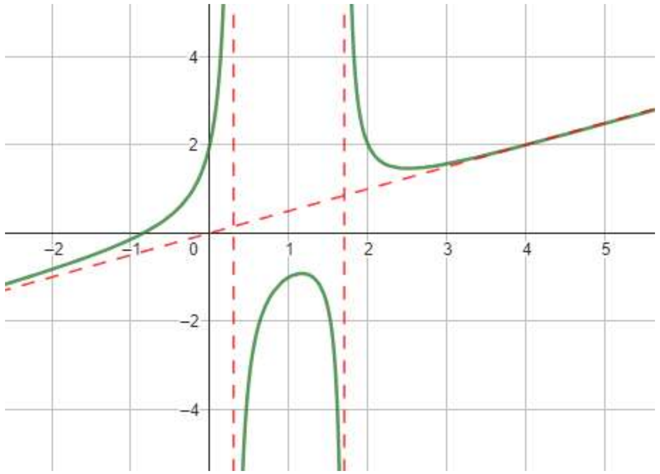


Charakteristische Eigenschaften

GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTIONEN

Gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

- Definitionslücken bei $N(x) = 0$
  - Hebbare Definitionslücken entfallen nach dem Kürzen
  - Polstellen bleiben
- Nullstellen bei $Z(x) = 0$



Grad	$f(x) =$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) =$
Z < N	$\dfrac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \cdots}$	0
Z = N	$\dfrac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \cdots}$	$\dfrac{a_1}{b_1}$
Z > N	$\dfrac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots}{b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots}$	Polynomdivision?

Graphentransformationen

FUNKTIONEN

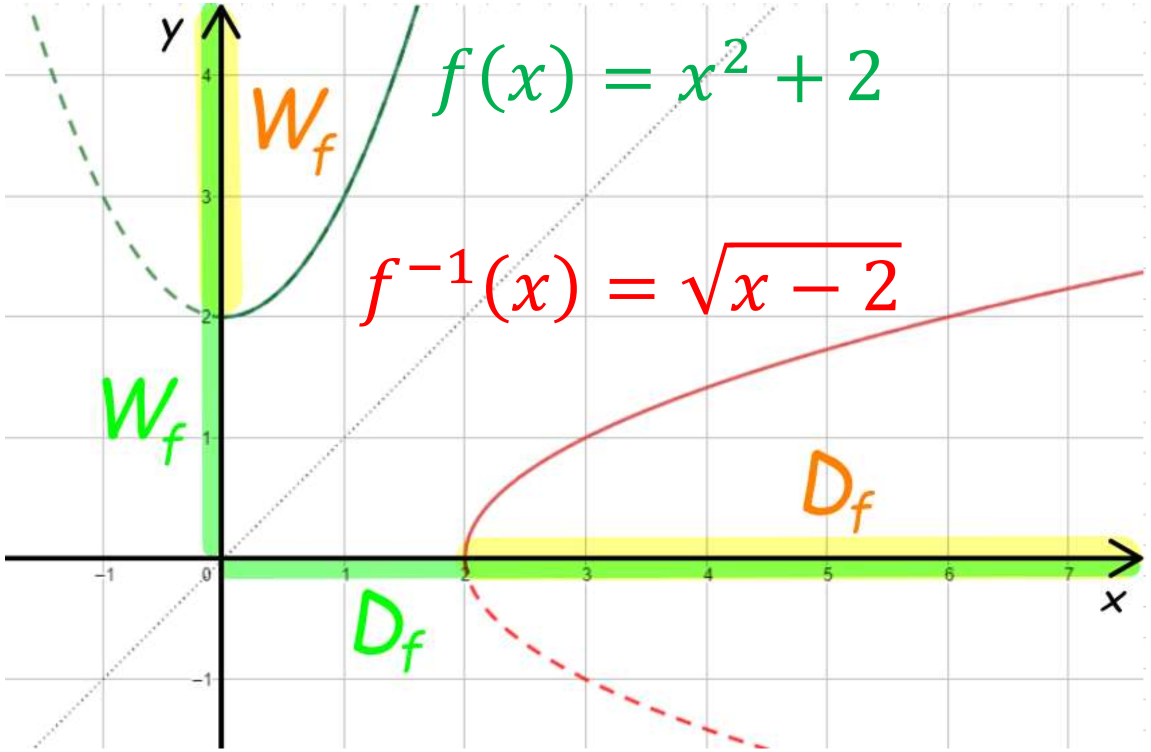
$g(x) =$	**Transformation**
$f(x-a)$	Horizontale Verschiebung um +a
$f(x)+a$	Vertikale Verschiebung um +a
$f(c \cdot x), c > 0$	Streckung, Stauchung in x-Richtung
$c \cdot f(x), c > 0$	Streckung, Stauchung in y-Richtung
$f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse
$-f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$f^{-1}(x)$	Spiegelung an der y = x - Geraden

Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

FUNKTIONEN

- Umkehrbar, wenn jeder y-Wert nur an einer x-Stelle vorkommt.
  Sonst muss D_f eingeschränkt werden
  - Bsp.: $f(x) = x^2, x \geq 0$, dann $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- Vorgehen:
  - $x \to y$ auflösen nach $y \to x$, dann Variablentausch
- Graphen gespiegelt an y = x

$\boldsymbol{g(x) =}$	$\boldsymbol{D_g =}$	$\boldsymbol{W_g =}$
$f(x)$	D_f	W_f
$f^{-1}(x)$	W_f	D_f



ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

Betrachtet wird die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

a Geben Sie die Wertemenge von f an.

ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto e^{-x}$. Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.

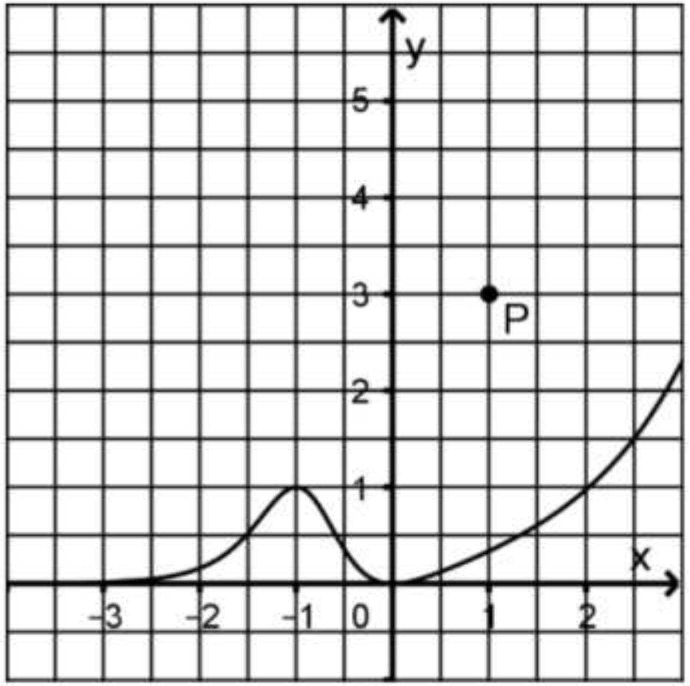
a Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann. Geben Sie die Wertemenge von q' an.

ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

a Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in IR definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an.



ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

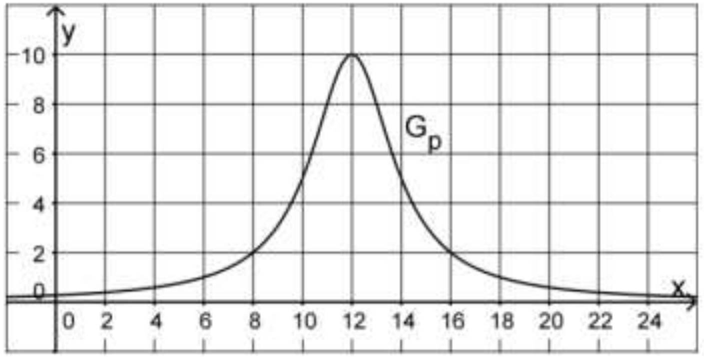
Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \left(x^2 - 9x\right) \cdot \sqrt{2 - x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an.

ABI-Aufgabe eA

FUNKTIONEN

Betrachtet wird die in IR definierte Funktion $p: x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2+4}$;

die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in IR definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto e^{-x}$. Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.

a Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann. Geben Sie die Wertemenge von q' an.

ABI-Aufgabe

FUNKTIONEN

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{4}{3}x$. Ihr Graph G_f hat den Wendepunkt $(0|0)$.

G_f soll in drei Schritten verändert werden. Die drei Schritte sind:

- Spiegeln an der x-Achse
- Verschieben um 6 in positive x-Richtung
- Verschieben um 14 in positive y-Richtung

Geben Sie an, wie viele verschiedene neue Graphen entstehen, wenn die drei Schritte in allen möglichen Reihenfolgen ausgeführt werden. Begründen Sie Ihre Angabe.

Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Längsschnitts einer Wasserrutschbahn, die aus einem Startbogen, einem Mittelabschnitt und einem Auslaufbogen zusammengesetzt ist. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die x-Achse beschreibt die Horizontale.

Die Rutschbahn weist in ihrem Längsschnitt weder eine Sprungstelle noch einen Knick auf. Der Auslaufbogen geht in seinem Endpunkt, der im Modell durch den Punkt C dargestellt wird, ohne Knick in die Horizontale über.

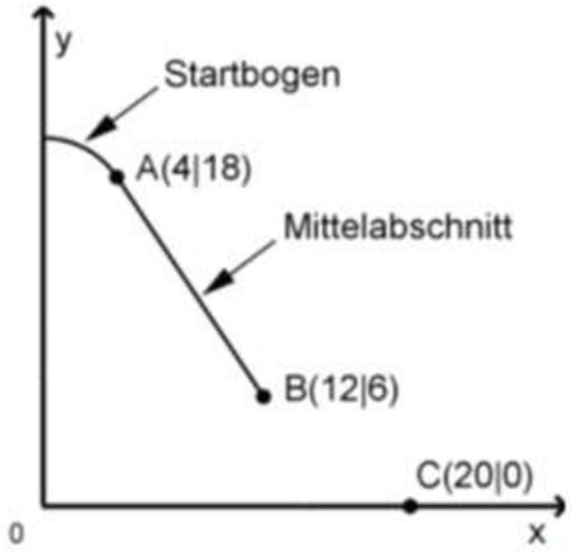


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Gerade, mithilfe derer der Mittelabschnitt beschrieben werden kann, sowie die Größe des Neigungswinkels dieses Abschnitts der Rutschbahn gegenüber der Horizontalen.

Geschafft !

FUNKTIONEN

Du kennst jetzt die wichtigsten Eigenschaften aller ABI-relevanter Funktionen!

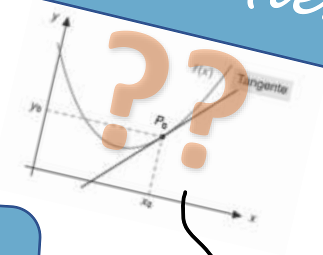
ABLEITUNGEN

Was ist das und was muss ich wissen?

Ableitungsregeln

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-e^{2x}}{x^2-5}\right)$$

Tangenten & Sekanten



Bedeutung

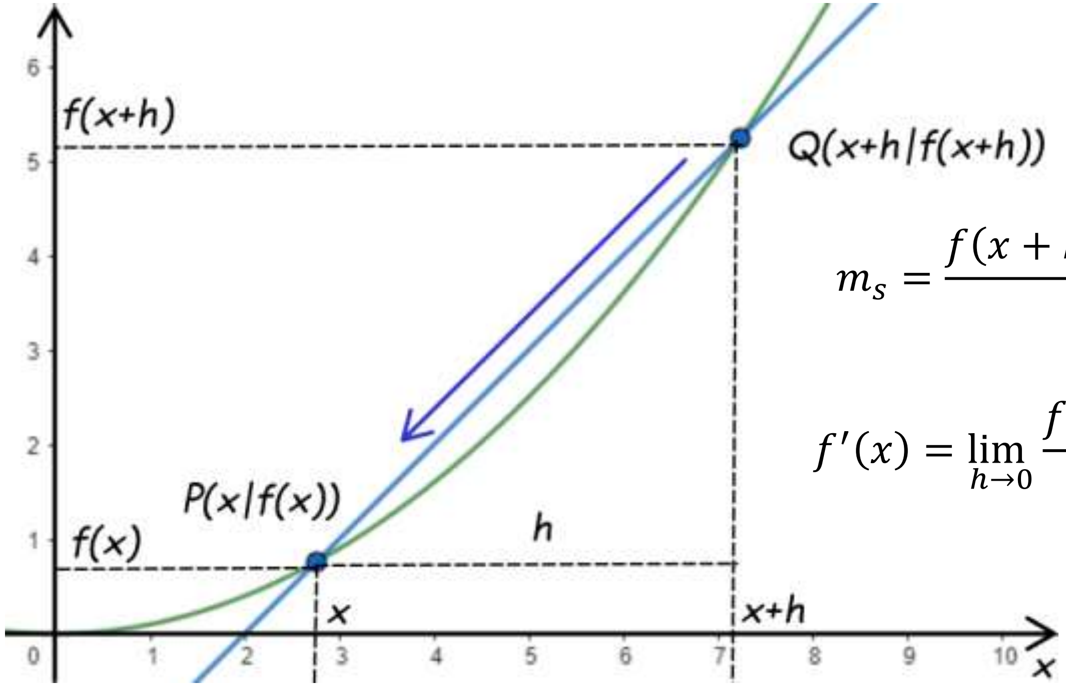
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sachzusammenhang

Strecke → Geschwindigkeit

Ableitung → Tangentensteigung (momentane Änderungsrate)

- Herleitung durch h-Methode
  - Differenzenquotient (Sekantensteigung) → Differentialquotient (Tangentensteigung)



$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ABLEITUNGSREGELN

ABLEITUNGEN

Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Ableitung von Konstanten

$f(x) =$	$\rightarrow$	$f'(x) =$	Beispiel
C	$\rightarrow$	0	$f(x) = 7 \rightarrow f'(x) =$
x^n	$\rightarrow$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) =$
$x^1 = x$	$\rightarrow$	$x^0 = 1$	$f(x) = x \rightarrow f'(x) =$
$c \cdot g(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot g'(x)$	$f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) =$
$g(x) \pm h(x)$	$\rightarrow$	$g'(x) \pm h'(x)$	$f(x) = 7x^2 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) =$

BESONDERE ABLEITUNGEN

ABLEITUNGEN

$f(x) =$	$\rightarrow$	$f'(x) =$	Beispiel
e^x	$\rightarrow$	e^x	$f(x) = 3\mathrm{e}^x + 2 \rightarrow f'(x) =$
a^x	$\rightarrow$	$a^x \cdot \ln(a)$	-
$\ln(x)$	$\rightarrow$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$f(x) = 3\ln(x) \rightarrow f'(x) =$
$\sin(x)$	$\rightarrow$	$\cos(x)$	$f(x) = 2\sin(x) + 4 \rightarrow f'(x) =$
$\cos(x)$	$\rightarrow$	$-\sin(x)$	$f(x) = 0{,}5\cos(x) - 2 \rightarrow f'(x) =$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) =$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\rightarrow$	$-n \cdot x^{-n+1} = -\frac{n}{x^{n-1}}$	$f(x) = 7x^2 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) =$

ABI-Aufgabe

ABLEITUNGEN

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = 2x \cdot f(x)$. Die Graphen von f und f' schneiden sich in einem Punkt. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in diesem Punkt.

PRODUKTREGEL

ABLEITUNGEN

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Übung: $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \boldsymbol{e}^x \quad f'(x) =$

QUOTIENTENREGEL

ABLEITUNGEN

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Übung: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$ $\quad f'(x) =$

KETTENREGEL

ABLEITUNGEN

Kettenregel

Innere Funktion „Innere Ableitung • äußere Ableitung“

$$f(x) = u\big(v(x)\big) \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot u'\big(v(x)\big)$$

Übung: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $f'(x) =$

$u =$ $u' =$

$v =$ $v' =$

ABI-Aufgaben

ABLEITUNGEN

$$f: x \mapsto \left(1-x^2\right) \cdot e^{-x}$$

$$g: x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$$

ABI-Aufgabe

ABLEITUNGEN

$$f(x) = 0{,}1 \cdot x \cdot (3 - x) \cdot e^x$$

Zeigen Sie, dass die in IR definierte Funktion F mit

$$F(x) = -0{,}1 \cdot \left(x^2 - 5x + 5\right) \cdot e^x$$

eine Stammfunktion von f ist.

ABI-Aufgabe

ABLEITUNGEN

Betrachtet wird die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = 2x \cdot f(x)$. Die Graphen von f und f' schneiden sich in einem Punkt. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in diesem Punkt.

ABI-Aufgabe

ABLEITUNGEN

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto e^{-x}$. Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.

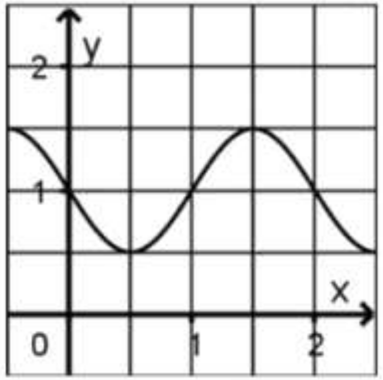
a Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem der Graph von q die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schneidet.

b Zeigen Sie, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.

ABI-Aufgabe

ABLEITUNGEN

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in IR definierten Funktion f.



a Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Für jeden Wert von x mit $0 \leq x \leq 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3.

Tangente, Sekante und Normale

ABLEITUNGEN

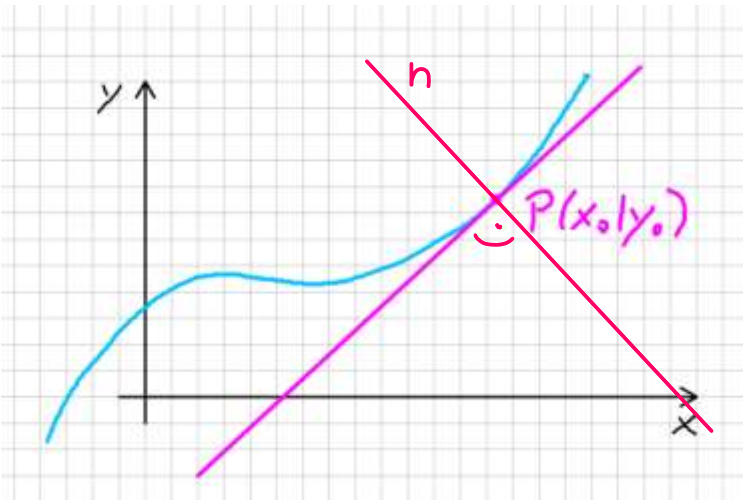
Bedeutung:

Tangentensteigung = momentane Änderungsrate (Steigung)
Sekantensteigung = mittlere Änderungsrate (Steigung)

Tangenten- und Normalensteigung im Punkt $P(x_0|y_0)$:

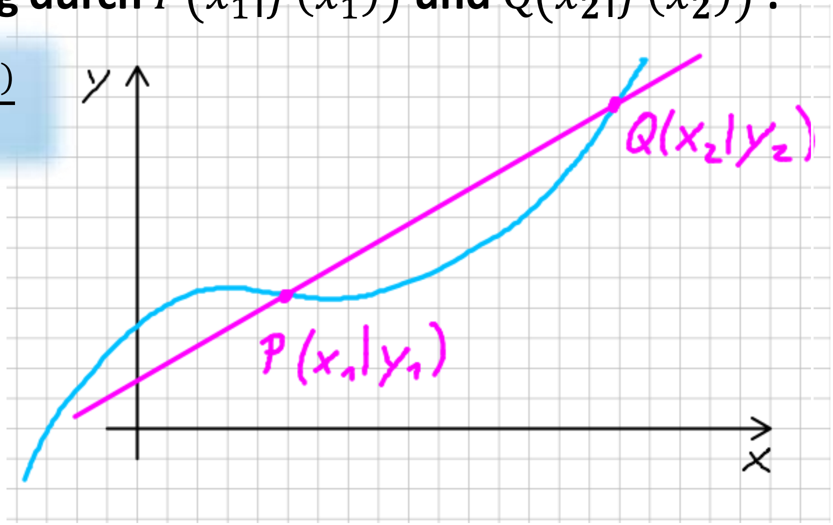
$$m_T = f'(x_0)$$

$$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$$



Sekantensteigung durch $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$:

$$m_s = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Tangente, Sekante und Normale

ABLEITUNGEN

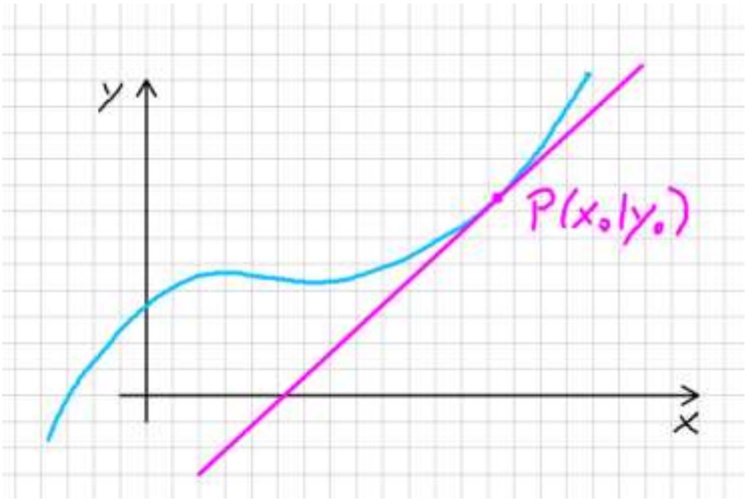
Geradengleichung:

Tangente durch $P(x_0|y_0)$

$t: y = mx + b$

$t: y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b$

$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

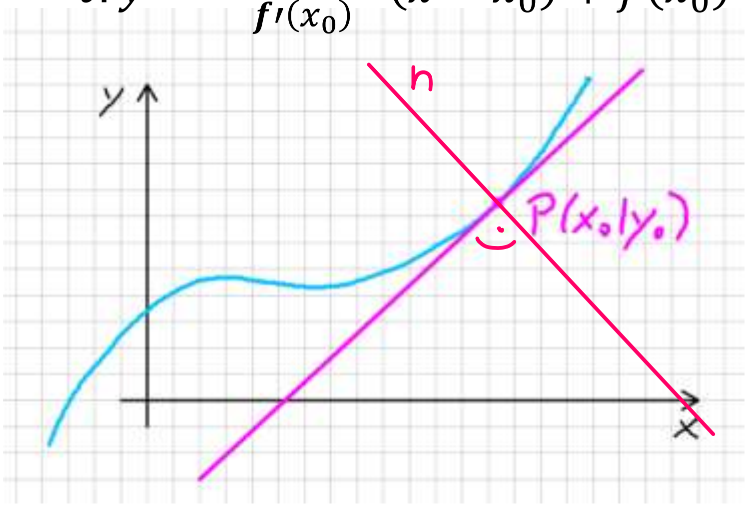


Normale in $P(x_0|y_0)$

$t: y = mx + b$

$t: y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0 + b$

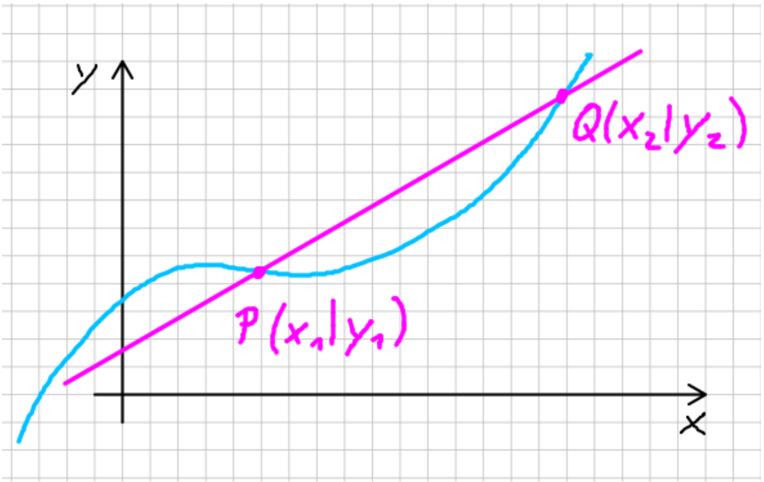
$t: y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$



Sekante durch $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$

$s: y = mx + b$

$s: y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$



ABI-Aufgabe

Tangente, Sekante und Normale

Betrachtet wird eine Funktion f, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1|f(1))$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x + 4$.

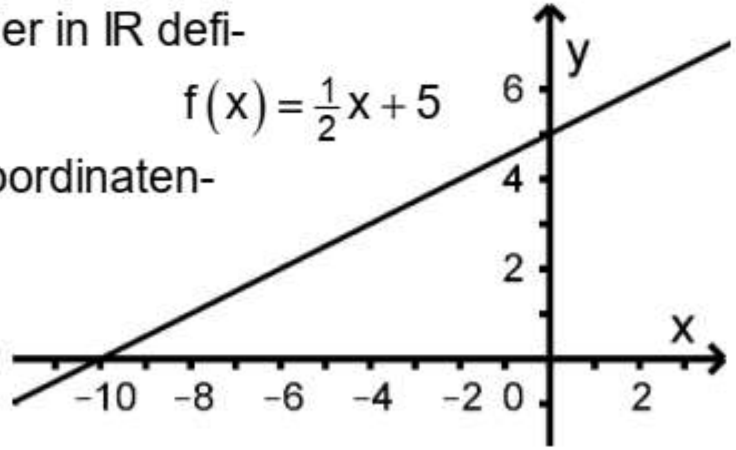
a Geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an den Graphen von f im Punkt $(-1|f(-1))$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

ABI-Aufgabe

Tangente, Sekante und Normale

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten linearen Funktion f.

Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zum Graphen.



ABI-Aufgabe

Tangente, Sekante und Normale

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{27}x^3-\frac{4}{3}x$. Ihr Graph G_f hat den Wendepunkt $(0|0)$.

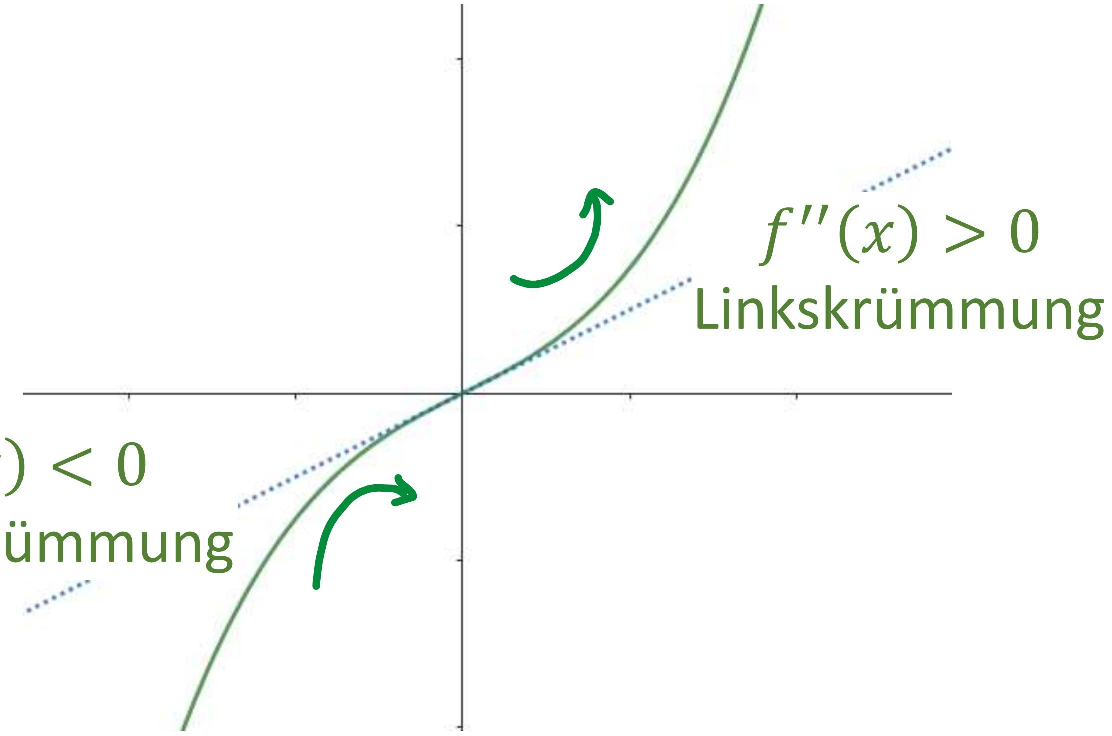
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(6|f(6))$.

Krümmung

ABLEITUNGEN

$f'(x_0)$ ... *Tangentensteigung des Graphen bei* x_0

$f''(x_0)$ ... *Krümmung des Graphen bei* x_0 (Steigungsänderung)



Sachzusammenhang

ABLEITUNGEN

$f'(x_0)$ … *Tangentensteigung des Graphen bei* x_0
$f'(t_0)$ … *momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt* t_0

$f(t)$	$\rightarrow$	$f'(t)$
Strecke	$\rightarrow$	Geschwindigkeit
Volumen/Menge in einem Behälter	$\rightarrow$	Zu- bzw. Ablaufgeschwindigkeit
Anzahl / Menge	$\rightarrow$	Änderungs- / Wachstumsrate
Konzentration (z.B. Medikament im Blut)	$\rightarrow$	Abbaurate

ABI-Aufgabe eA

Sachzusammenhang ABLEITUNGEN

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

$$s(x) = \left(\tfrac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3$$

Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge.

Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt zwischen 06:00 Uhr und 10:00 Uhr, zu dem die Staulänge 0,5 km geringer ist als eine Stunde vorher.

Im rechten Abschnitt der Brücke wird der Verlauf des Abspannseils modellhaft durch den Funktionsterm $r(x)=\frac{253}{100}\cdot\left(e^{\frac{1}{11}\cdot(32-x)}-1\right)$ beschrieben.

Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das rechte Abspannseil auf den zugehörigen Pfeiler trifft.

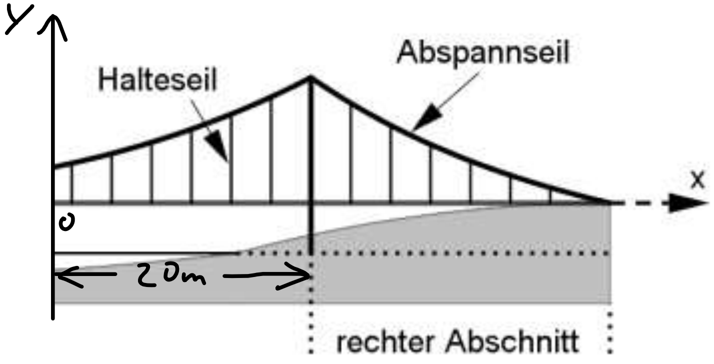


Abb. 1

ABI-Aufgabe eA

Sachzusammenhang ABLEITUNGEN

$$f: x \mapsto 1 + 7e^{-0{,}2x}$$

Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $A: x \mapsto \dfrac{8}{f(x)}$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Südufer eines Sees. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen und $A(x)$ der Flächeninhalt in Quadratmetern.

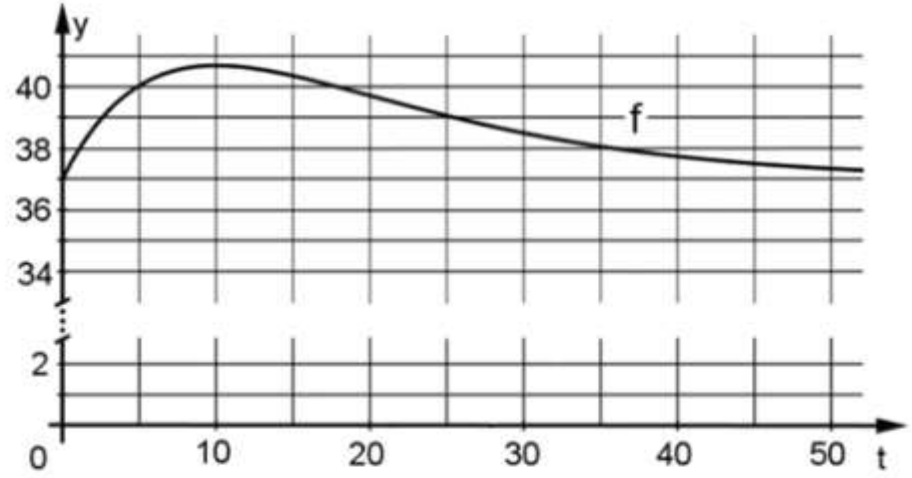
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs zu Beobachtungsbeginn.

ABI-Aufgabe

Sachzusammenhang ABLEITUNGEN

Aufgabe 1A

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren.
Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit $37{,}0\,°C$ angenommen. Bei Temperaturen ab $37{,}9\,°C$ spricht man von Fieber.



Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 37 + t \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach dem Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$. Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Stunden, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

Berechnen Sie die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten 5 Stunden

Berechnen Sie $f'(2)$ und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Geschafft !

ABLEITUNGEN

Du weißt jetzt, was Ableitungen bedeuten und kannst ABI-relevante Ableitungen bilden!

INTEGRALRECHNUNG

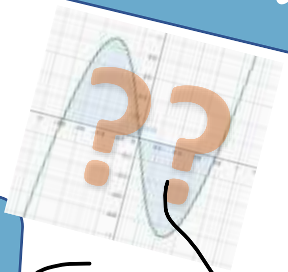
Was ist das und was muss ich wissen?

Integrationsregeln

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx$$

??

Flächenbilanz und -inhalt



??

Bedeutung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

??

Sachzusammenhang

Durchflussrate → Füllvolumen

??

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige stetige Funktion auf einem reellen Intervall I, so ist für jedes $c \in I$ die Integralfunktion

$$F\colon I \to \mathbb{R} \text{ mit } F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f, das heißt, für alle $x \in I$ gilt $\boxed{F'(x) = f(x)}$

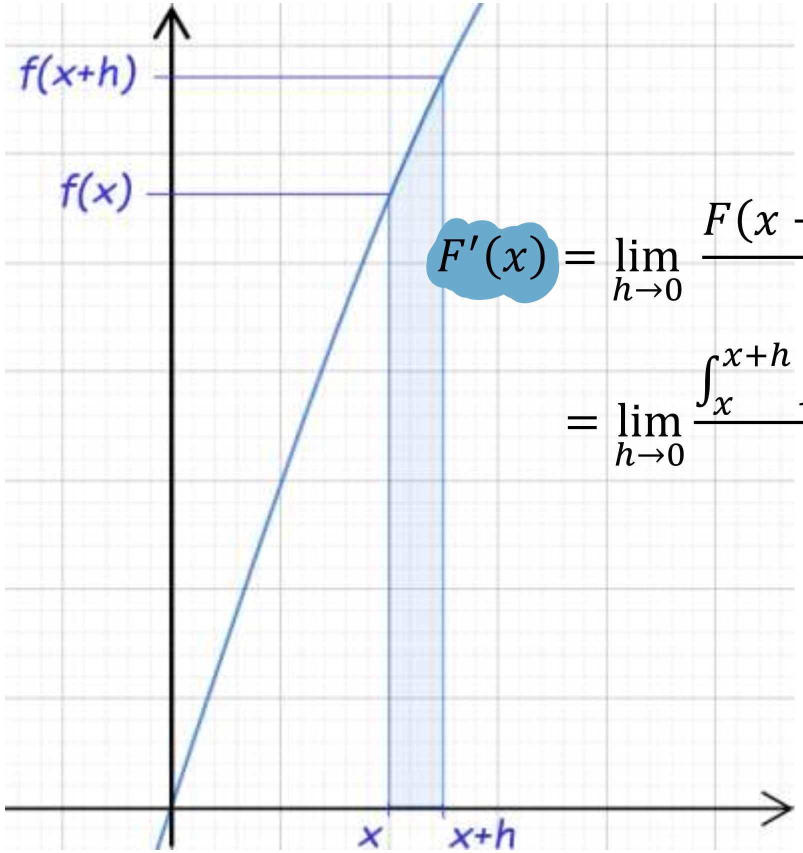
Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit Stammfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

dann gilt die Newton-Leibniz-Formel $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).}$

STAMM- & INTEGRALFUNKTION

INTEGRALRECHNUNG

Herleitung des HDI



$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x)$$

Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$

- Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- muss keine Nullstelle haben (muss also keine Integralfunktion sein)

Integralfunktion:

$$J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

- Nullstelle bei $x = a$

INTEGRATIONSREGELN

INTEGRALRECHNUNG

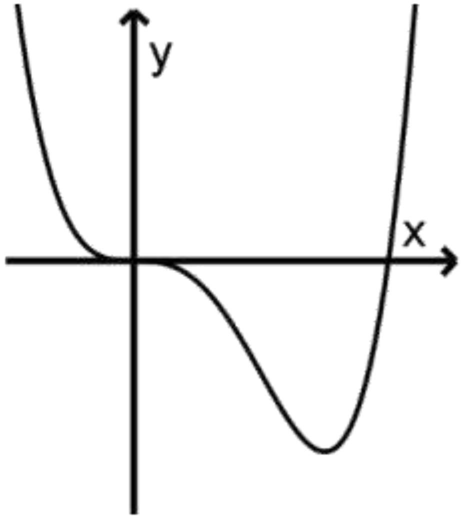
Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Integration von Konstanten

$f(x)$	$\rightarrow$	$F(x)$	Beispiel (**alle** Stammfunktionen)
0	$\rightarrow$	$C \in \mathbb{R}$	$f(x) = 0 \rightarrow F(x) =$
C	$\rightarrow$	$C \cdot x$	$f(x) = 7 \rightarrow F(x) =$
x^n	$\rightarrow$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$f(x) = x^5 \rightarrow F(x) =$
$c \cdot g(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot \mathrm{G}(x)$	$f(x) = 4x^3 \rightarrow F(x) =$
$g(x) \pm h(x)$	$\rightarrow$	$\mathrm{G}(x) \pm \mathrm{H}(x)$	$f(x) = 7x^2 + 2x - 1 \rightarrow F(x) =$

ABI-Aufgabe

INTEGRALRECHNUNG

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion $f: x \mapsto x^4 - 4x^3$.



a Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)\,dx$.

BESONDERE INTEGRALE

INTEGRALRECHNUNG

$f(x) =$	$\rightarrow$	$F(x) =$	Beispiel (**alle** Stammfunktionen)
e^x	$\rightarrow$	e^x	$f(x) = 3e^x + 2 \Rightarrow F(x) =$
$\sin(x)$	$\rightarrow$	$-\cos(x)$	$f(x) = 2\sin(x) + 4 \Rightarrow F(x) =$
$\cos(x)$	$\rightarrow$	$\sin(x)$	$f(x) = 0{,}5\cos(x) - 2 \Rightarrow F(x) =$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\rightarrow$	$\ln\lvert x\rvert$	$f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow F(x) =$
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$			$\int_0^4 f(x)\,dx = 7 \Rightarrow \int_4^0 f(x)\,dx =$

Integration durch Substitution (Kettenregel)

$$\int \boldsymbol{f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x))}$$

Beispiele:

$$\int \frac{5x}{2x^2-4}\,dx =$$

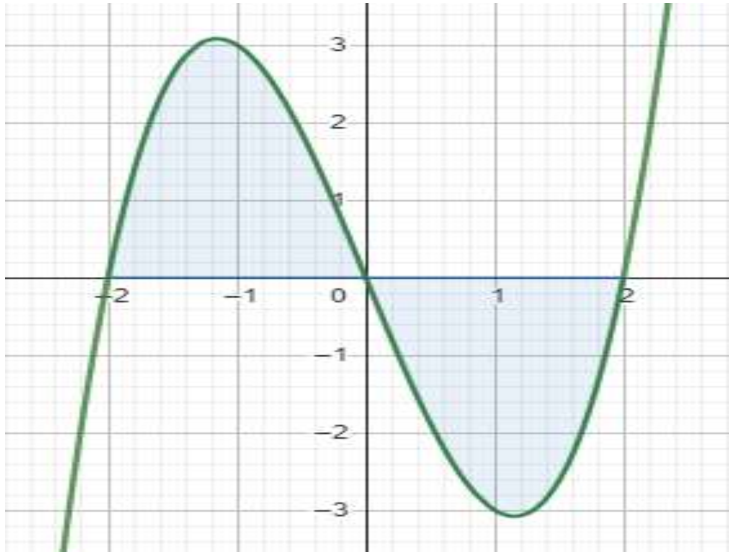
$$\int \frac{5}{2(3x-5)^4}\,dx =$$

$$\int \cos(3x-4)\,dx =$$

$$\int 2x \cdot e^{4x^2-2}\,dx =$$

FLÄCHENBILANZ- UND INHALT

INTEGRALRECHNUNG



$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$A =$$

Flächenbilanz: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$

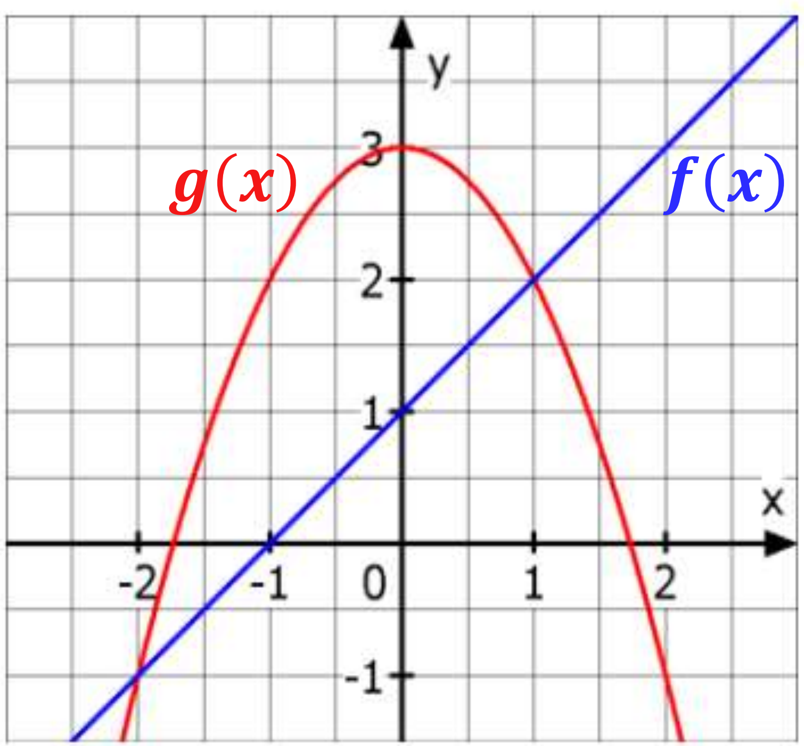
Flächeninhalt: $\mathrm{A} = \int_{-2}^{0} \mathrm{f(x)\,dx} + \left|\int_{0}^{2} \mathrm{f(x)\,dx}\right|$

FLÄCHENINHALT

INTEGRALRECHNUNG

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]\, dx \right|$$



$f(x) =$

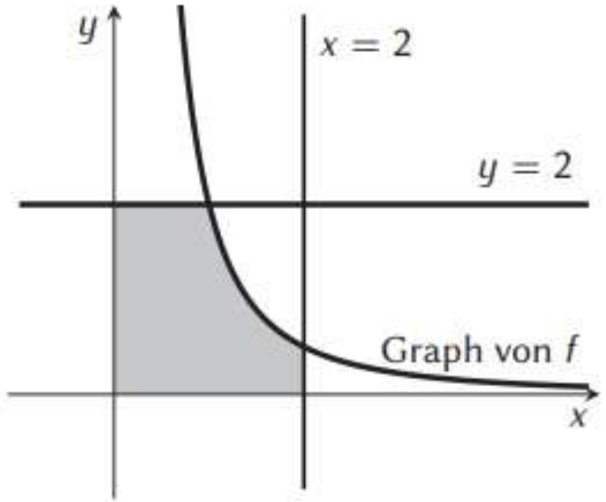
$g(x) =$

$A =$

ABI-Aufgabe

INTEGRALRECHNUNG

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $x > 0$.



Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

ABI-Aufgabe

INTEGRALRECHNUNG

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto e^{-x}$. Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.

Geben Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung $\int\limits_0^b (q(x) - p(x))\,dx = 4$ an und bestimmen Sie den Wert von b.

ABI-Aufgabe

INTEGRALRECHNUNG

Die Abbildung 1 zeigt die Graphen der in IR definierten Funktionen $r: x \mapsto -(x^2 - x - 1)$ und $s: x \mapsto e^x$. Die beiden Graphen haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse.

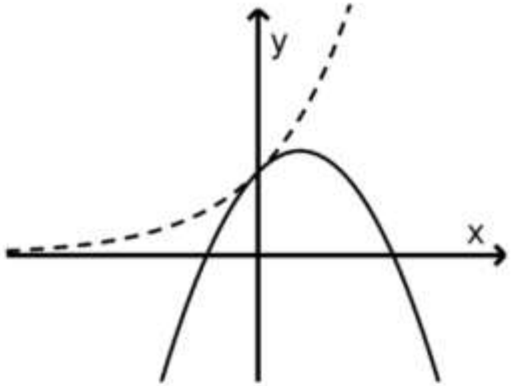
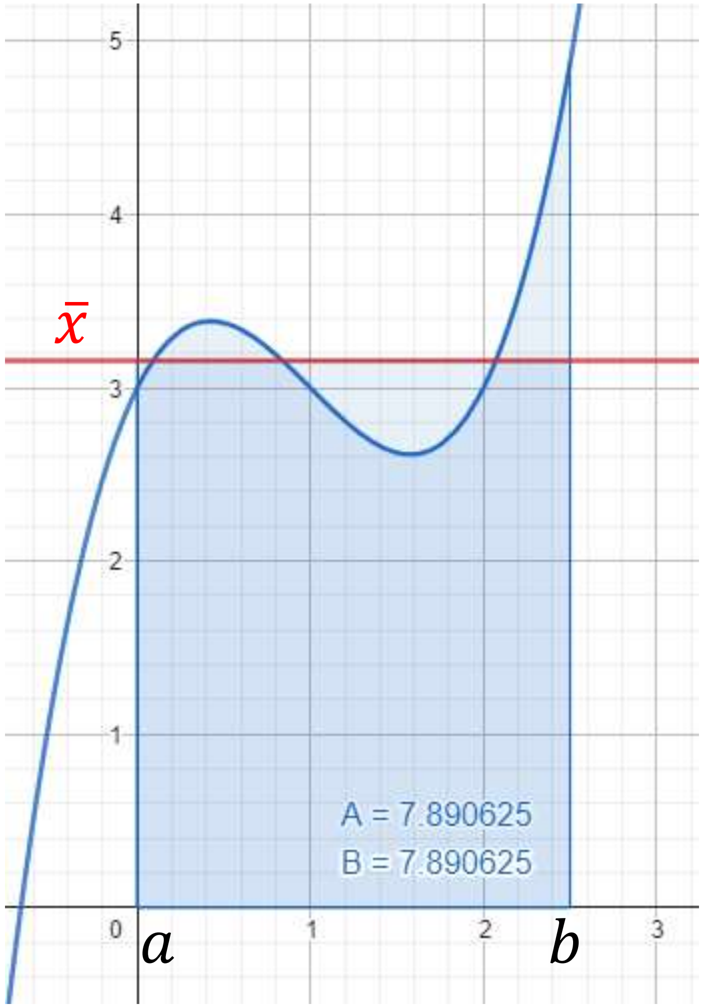


Abb. 1

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von r und s und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen.

MITTELWERT

INTEGRALRECHNUNG



Mittelwert über das Intervall $x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{x} \cdot (b - a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{x} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

SACHZUSAMMENHANG

INTEGRALRECHNUNG

Die Einheit der Stammfunktion gibt Aufschluss über die Bedeutung des Integrals:

$$[F(x)] = [f(x)] \cdot [x] \qquad \text{z.B. } [F(x)] = \frac{m^3}{\cancel{\text{min}}} \cdot \cancel{\text{min}} = m^3$$

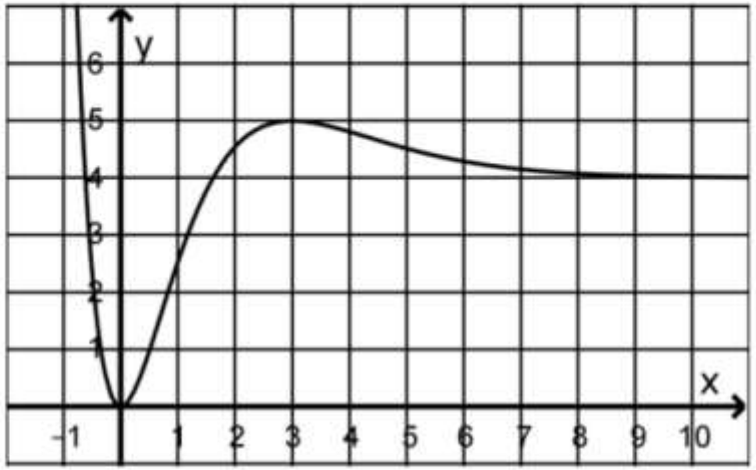
$f(t)$	$\rightarrow$	$F(t)$
Durchflussmenge [z.B. $\frac{l}{min}$]	$\rightarrow$	Füllvolumen [z.B. $Liter$]
Geschwindigkeit [z.B. $\frac{km}{h}$]	$\rightarrow$	Strecke [z.B. km]
Änderungs- / Wachstumsrate [z.B. $pro\ Tag$]	$\rightarrow$	Anzahl / Menge
Abbaurate	$\rightarrow$	Konzentration (z.B. Medikament im Blut)
(Mittelwertsatz)	$\rightarrow$	Mittelwert im Intervall $x \in [a, b]$

Abi-Aufgabe 1/2

INTEGRALRECHNUNG

Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in IR definierte Funktion $w: x \mapsto 4\cdot\left(x^2-x-1\right)\cdot e^{-x}+4$ beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.



Die Abbildung zeigt den Graphen von w.

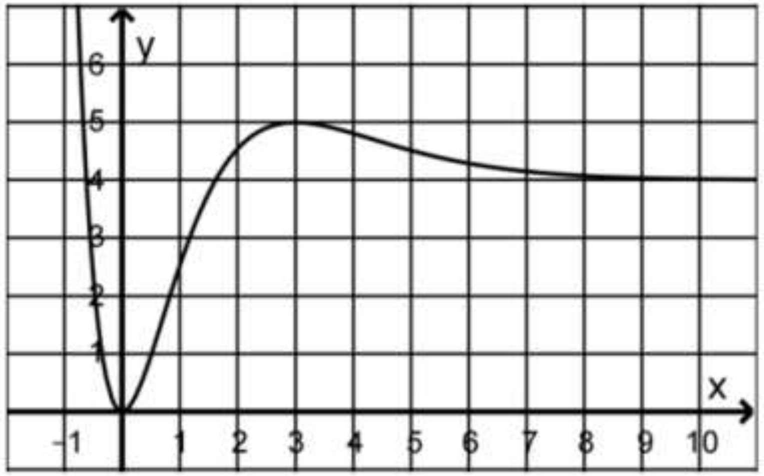
Betrachtet wird der Zeitraum der ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn. Beschreiben Sie unter Verwendung geeigneter Flächen die graphische Bedeutung der folgenden Aussage:

Für den betrachteten Zeitraum beträgt die mittlere Durchflussrate etwa $4\,\frac{m^3}{s}$.

Abi-Aufgabe 2/2

INTEGRALRECHNUNG

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $w : x \mapsto 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + 4$ beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.



Die Abbildung zeigt den Graphen von w.

An der Messstelle fließen in einem Zeitraum von drei Sekunden dreizehn Kubikmeter Wasser vorbei. Berechnen Sie die dafür infrage kommenden Zeiträume.

Geschafft !

INTEGRALRECHNUNG

Du weißt jetzt,

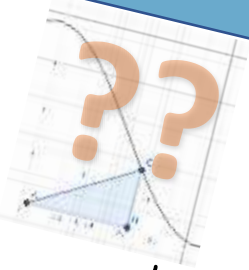
- was Integrale bedeuten,
- wie man sie berechnet und
- wie du sie anwendest!

KURVENDISKUSSION

Themenübersicht

Modellierung

Optimierung



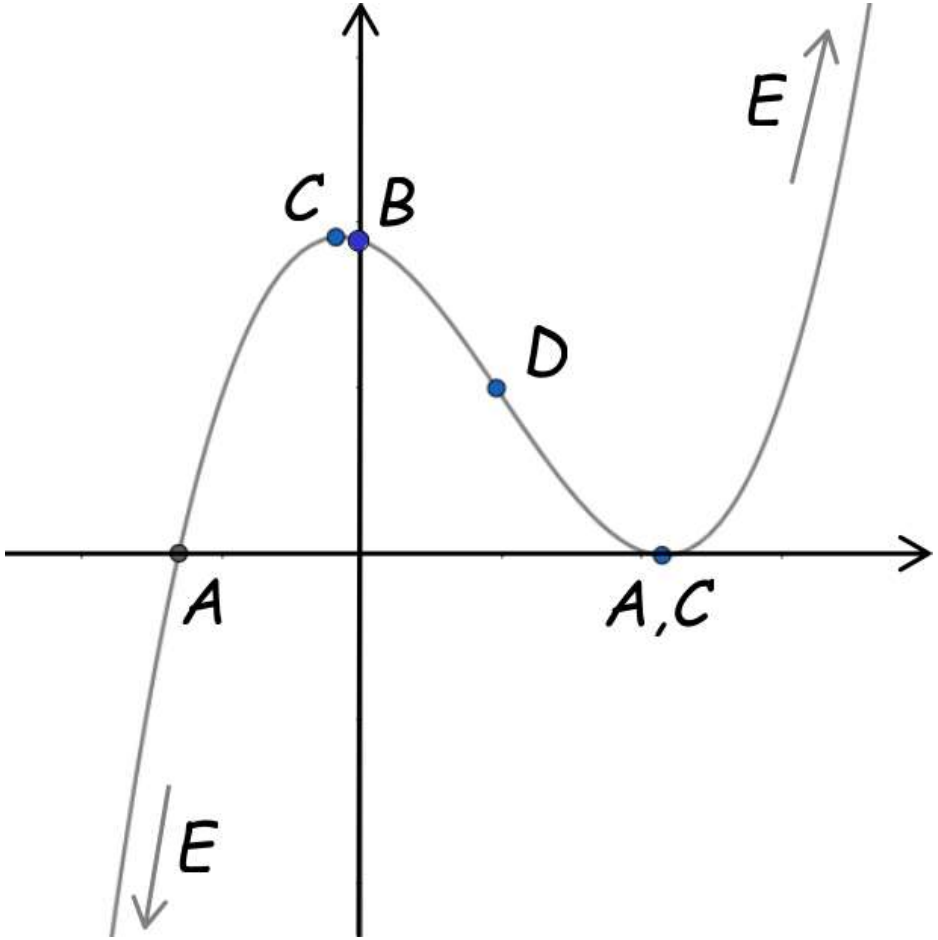
Kurvendiskussion

Scharfunktionen

$f(x) = 3k \cdot e^{-kx}, k \in \mathbb{R}$

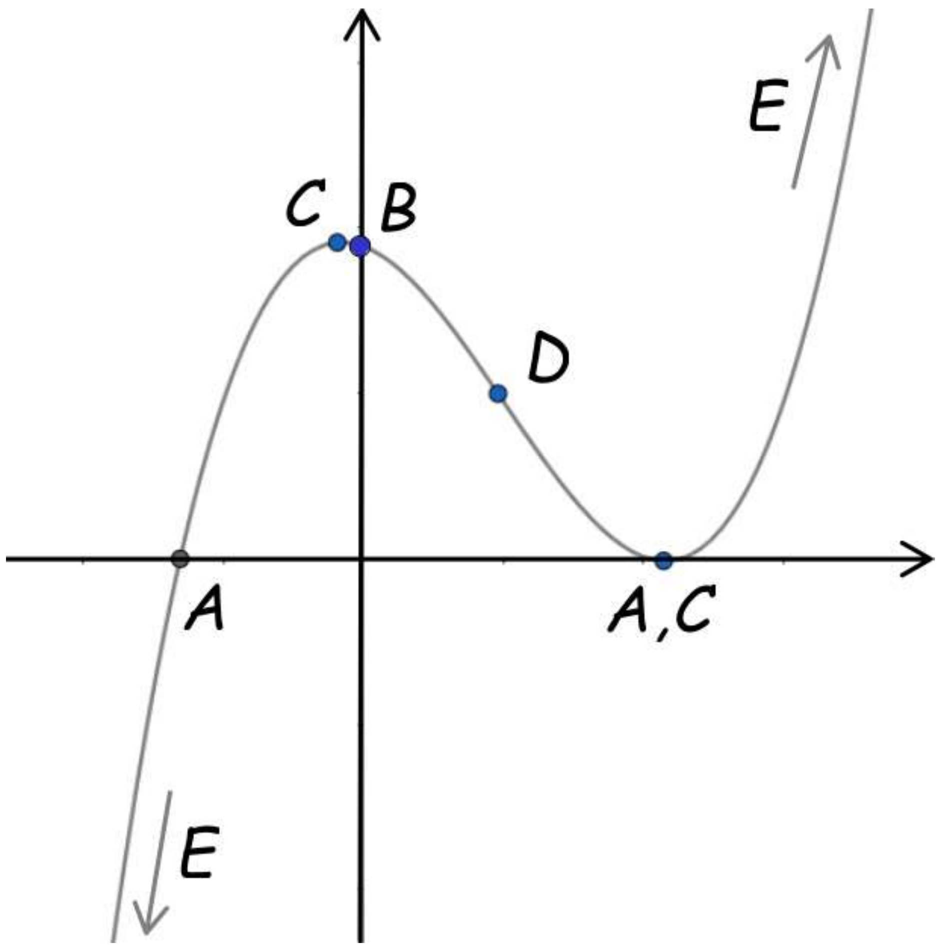
WICHTIGE ASPEKTE

KURVENDISKUSSION



WICHTIGE ASPEKTE

KURVENDISKUSSION



a) **Nullstellen**

b) **Y-Achsenabschnitt**

c) **Extrempunkte**

d) **Wendepunkte**

e) **Grenzverhalten**

f) **Symmetrie**

g) **Monotonie**

h) **Definitions- und Wertebereich**

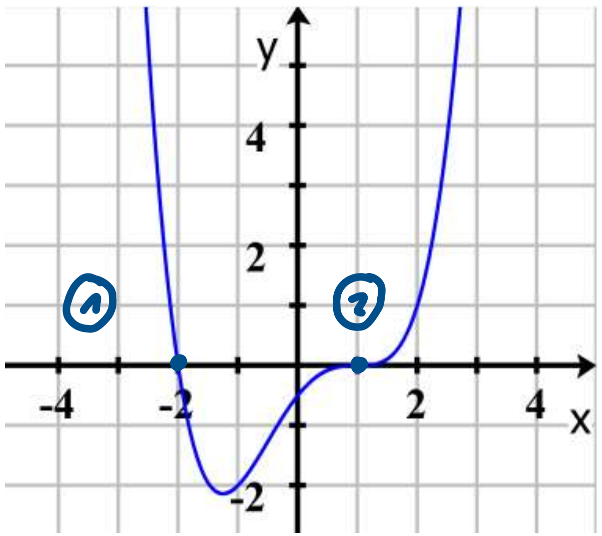
NULLSTELLEN

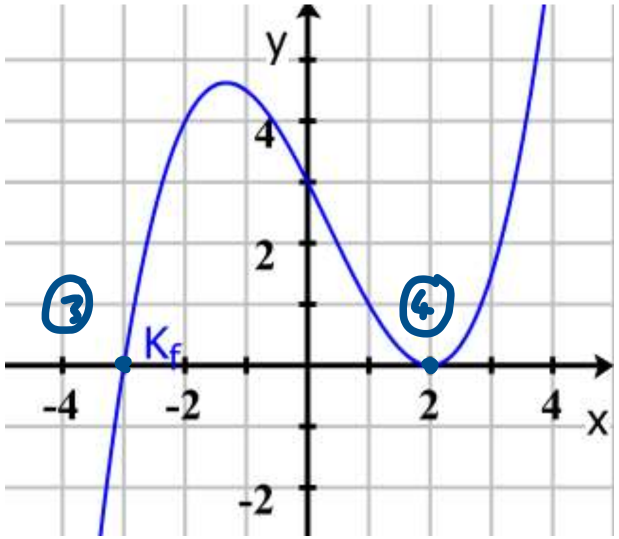
KURVENDISKUSSION

Nullstellen = Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse ⇒ $y_N = f(x_N) = 0$

(bei gebrochen-rationalen Funktionen: Nullstellen des Zählers)

Vielfachheit von Nullstellen:





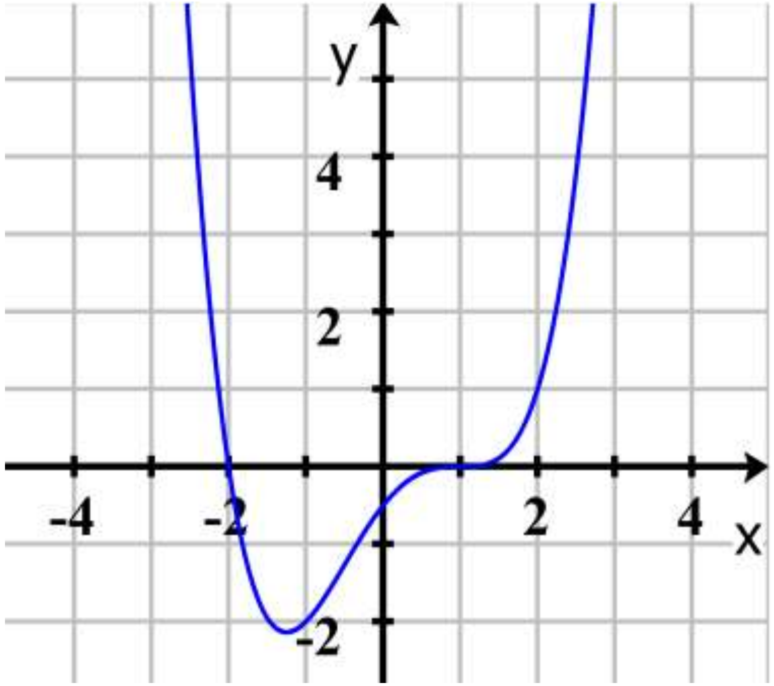
1) einfach
2) dreifach
3) einfach
4) doppelt

NULLSTELLEN

KURVENDISKUSSION

Vielfachheit von Nullstellen:

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+x-2\right)\left(x^2-2x+1\right)$$

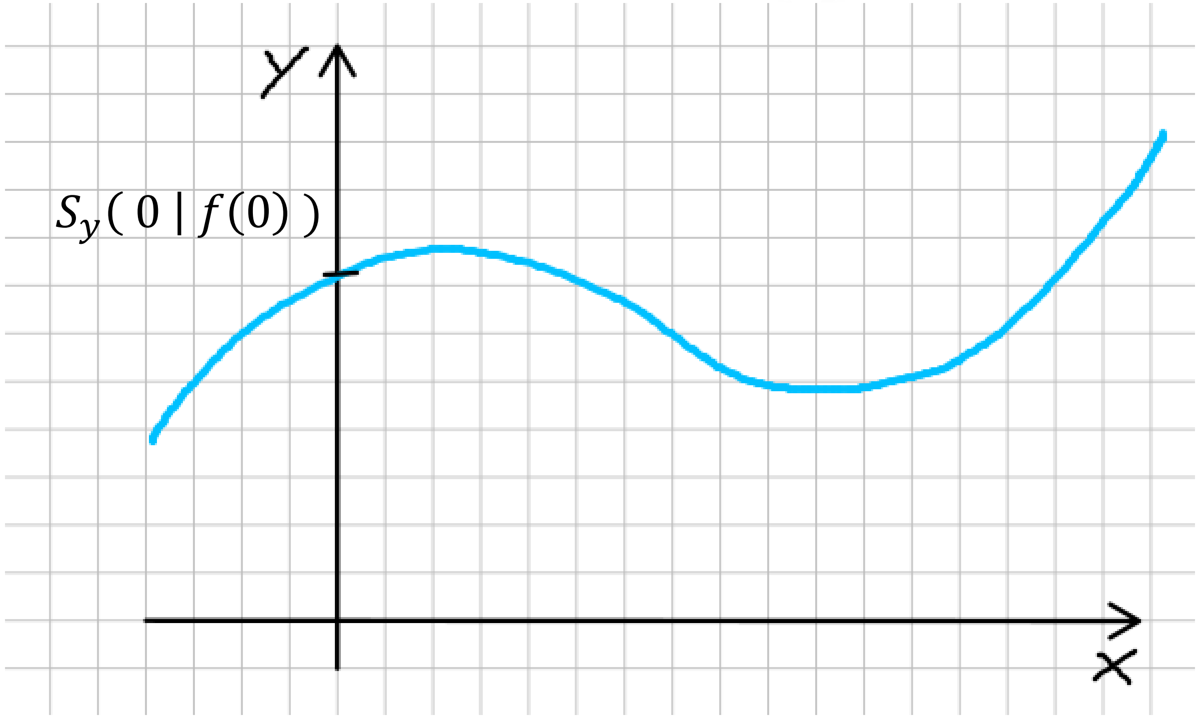


Y-ACHSENABSCHNITT

KURVENDISKUSSION

y-Achsenabschnitt = Schnittpunkt mit der y-Achse ⇒ $S_y(\,0\,|\,f(0)\,)$

- bei ganzrationalen Funktionen: absolutes Glied, z.B. $f(x) = 2x^4 - 3x + 5$
- Beachte: $a^0 = 1,\ \ln(0) = ↯,\ \frac{a}{0} = ↯$



Extrempunkte = Punkte mit lokal maximalem/minimalem Funktionswert

- Tangentensteigung bei $x = x_E$ ist 0 $\Rightarrow f'(x_E) = 0$
- Rechtskrümmung im Hochpunkt $\Rightarrow f''(x_H) < 0$
- Linkskrümmung im Tiefpunkt $\Rightarrow f''(x_T) > 0$

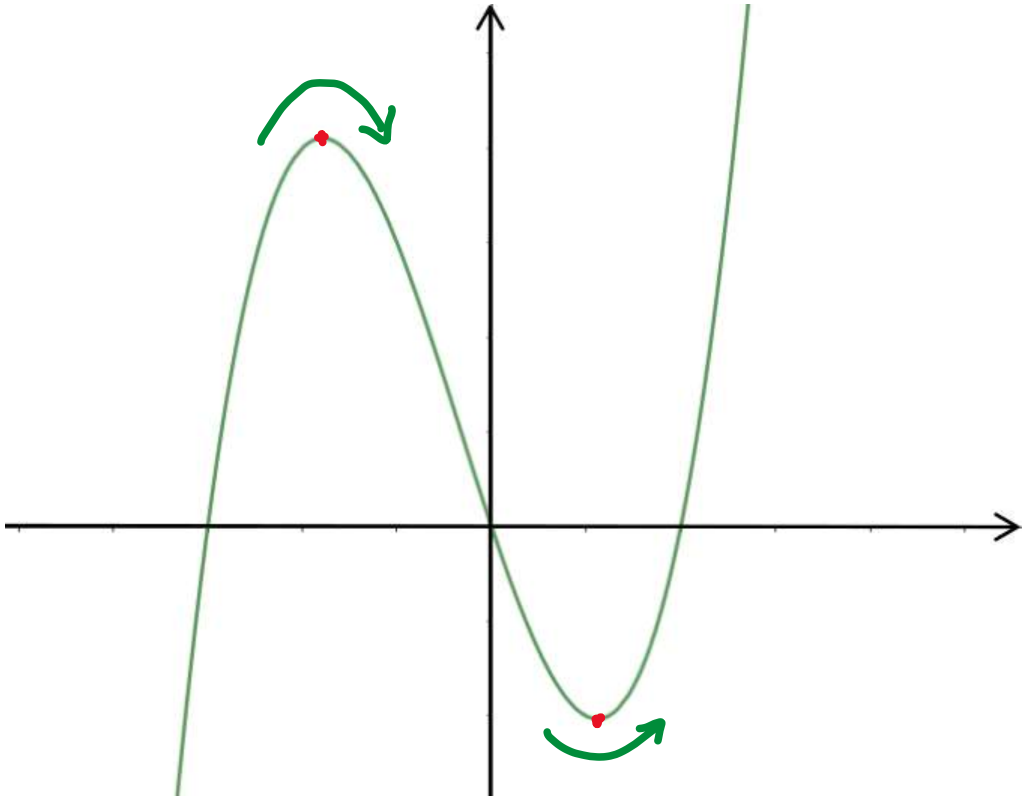
Extrempunkte berechnen: $\mathbf{E}(\underbrace{\boldsymbol{x_E}}_{(1)}|\boldsymbol{y_E})$ (2) (1) (3)

(1) Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$

(2) Hinreichende Bedingung *: $f''(x_E) < 0$, dann HP

$f''(x_E) > 0$, dann TP

(3) y-Werte berechnen: $y_E = f(x_E)$



* Oder bei komplizierten Funktionen VZW von $f'(x)$

WENDEPUNKTE

KURVENDISKUSSION

Wendepunkte = Punkte mit lokal maximaler/minimaler Steigung

- Krümmungsänderung bei $x = x_W$

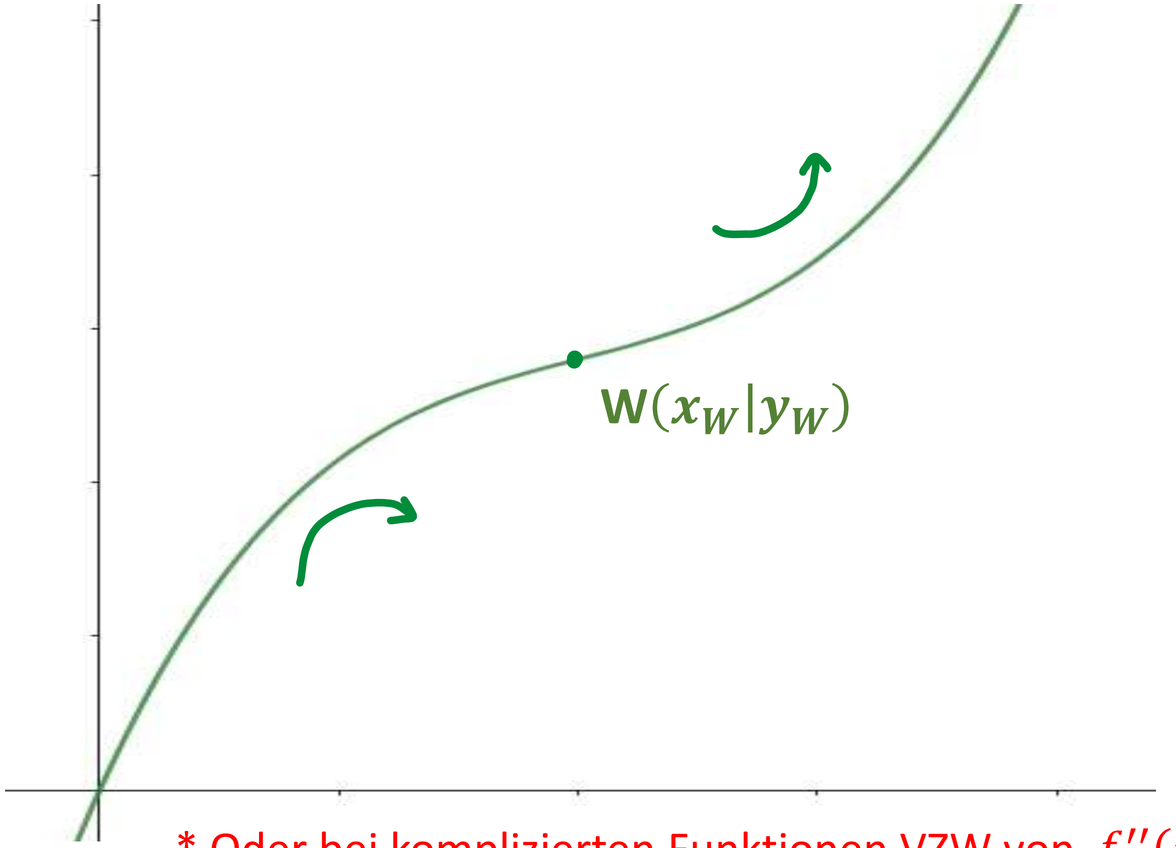
  $\Rightarrow f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$

Wendepunkte berechnen: $\mathbf{W}(x_W | y_W)$ (2) (1) (3)

(1) Notwendige Bedingung: $f''(x_W) = 0$

(2) Hinreichende Bedingung * : $f'''(x_W) \neq 0$

(3) y-Werte berechnen: $y_W = f(x_W)$



* Oder bei komplizierten Funktionen VZW von $f''(x)$

GRENZVERHALTEN

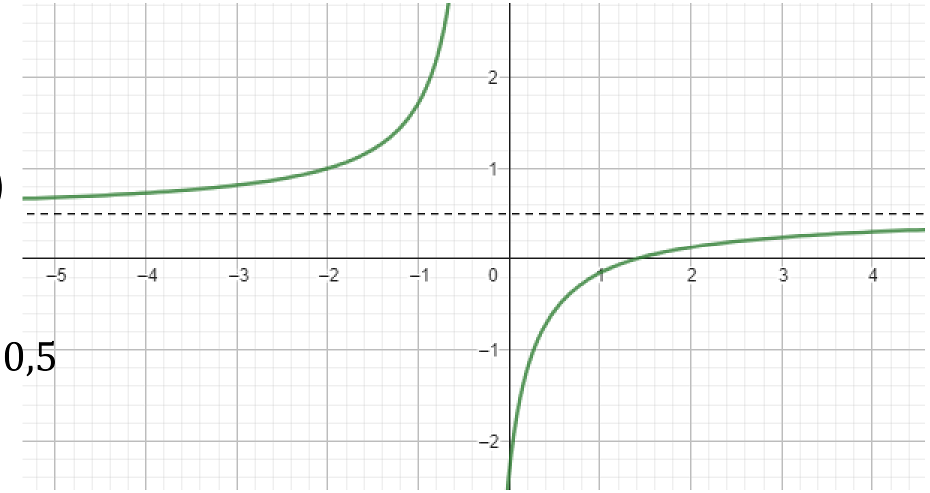
KURVENDISKUSSION

Grenzverhalten = globales Verhalten, Verhalten der Funktionswerte bei $x \to \pm\infty$

- Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet der Term mit höchster Potenz.
  - z.B. $f(x) = 2x^2 \mathbf{- 5x^3} + 4$

- Bei Multiplikationen von ganzrationalen Funktionen mit e-Funktionen entscheidet der e-Term.
  - Z.B. $f(x) = (3x^2 - 2x) \cdot \mathbf{e^{-x}}$

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen gilt (Z=Zählergrad, N=Nennergrad)
  - $\boldsymbol{Z < N}$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, z.B. $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2+5x} \;\Rightarrow\; x \to \pm\infty\colon\; f(x) \to 0$
  - $\boldsymbol{Z = N}$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{c}$, z.B. $f(x) = \frac{5x^2-7x}{3x+10x^2} \;\Rightarrow\; x \to \pm\infty\colon\; f(x) \to \frac{5}{10} = 0{,}5$
  - $\boldsymbol{Z > N}$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

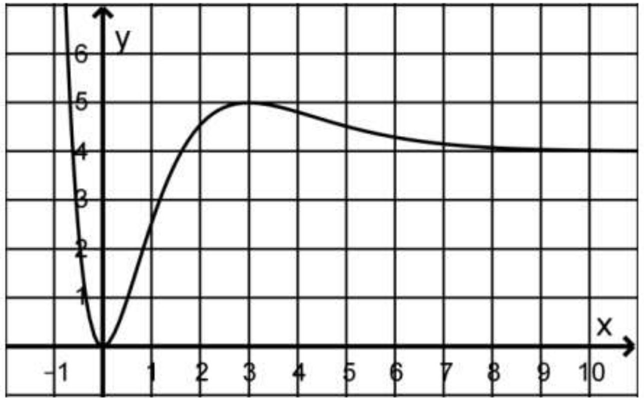


ABI-Aufgabe

KURVENDISKUSSION

Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in IR definierte Funktion $w: x \mapsto 4 \cdot \left(x^2 - x - 1\right) \cdot e^{-x} + 4$ beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.



Die Abbildung zeigt den Graphen von w.

a Geben Sie den Wert des Terms $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x)$ sowie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

b Bestimmen Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt.

SYMMETRIE

KURVENDISKUSSION

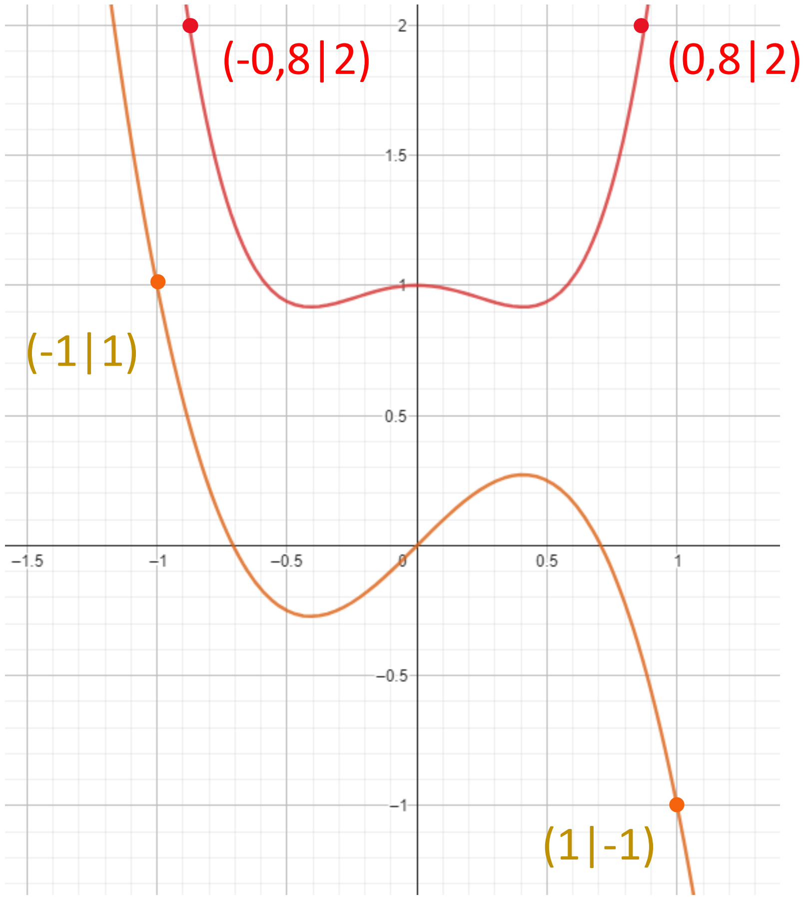
Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$

Bei ganzrationalen Funktionen gilt:

- alle Exponenten gerade (inkl. x^0): achsensymmetrisch , z.B. $f(x) = 3x^4 - x^2 + 3$
- alle Exponenten ungerade: punktsymmetrisch , z.B. $f(x) = -2x^3 + 5x$

$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$



MONOTONIE

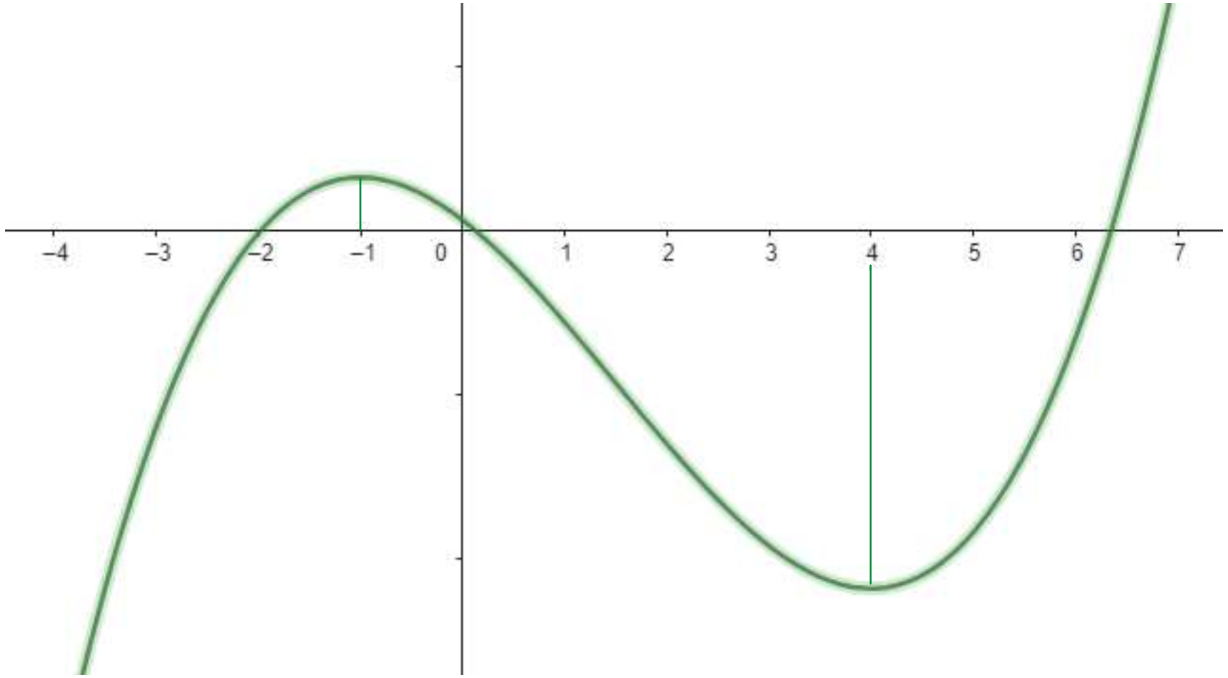
KURVENDISKUSSION

Monotonie = Steigungsverhalten

- Streng monoton steigend $f'(x) > 0$
- Monoton steigend $f'(x) \geq 0$
- Monoton fallend $f'(x) \leq 0$
- Streng monoton fallend $f'(x) < 0$

Vorgehen:

(1) Extremstellen bestimmen
(2) Intervalle links, rechts und zwischen den Extremstellen festlegen
(3) Vorzeichen der Steigung in den Intervallen berechnen



Intervall		[-1 ; 4] $-1 \leq x \leq 4$	
f'(x)			

ABI-Aufgabe

KURVENDISKUSSION

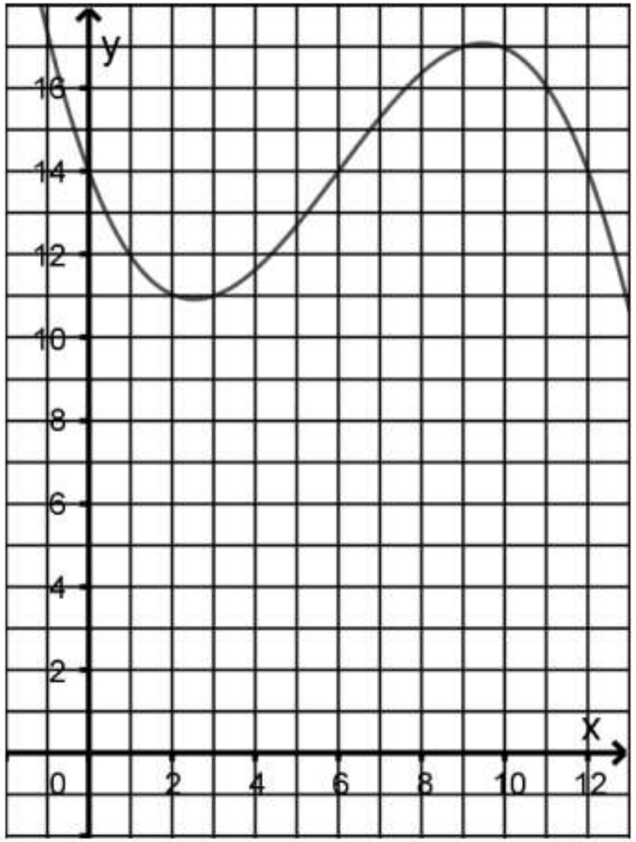
1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{27}x^3-\frac{4}{3}x$. Ihr Graph G_f hat den Wendepunkt $(0|0)$.

a Begründen Sie, dass G_f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

b G_f hat zwei Extrempunkte. Zeigen Sie, dass einer der beiden ein Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{12}$ ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion g mit
$g(x) = -\frac{1}{27} x \cdot (x-6) \cdot (x-12) + 14$.

In einem Modell, das aus langjährigen Messungen gewonnen wurde, beschreibt g für $0 \leq x < 12$ den Verlauf der Tagesdurchschnittstemperatur an einem bestimmten Ort. Dabei ist x die seit einem bestimmten Tag des Kalenderjahres vergangene Zeit in Monaten und $g(x)$ die Temperatur in °C.



a Geben Sie die Wendestelle von g an. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle hinsichtlich des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur.

ABI-Aufgabe 2/3

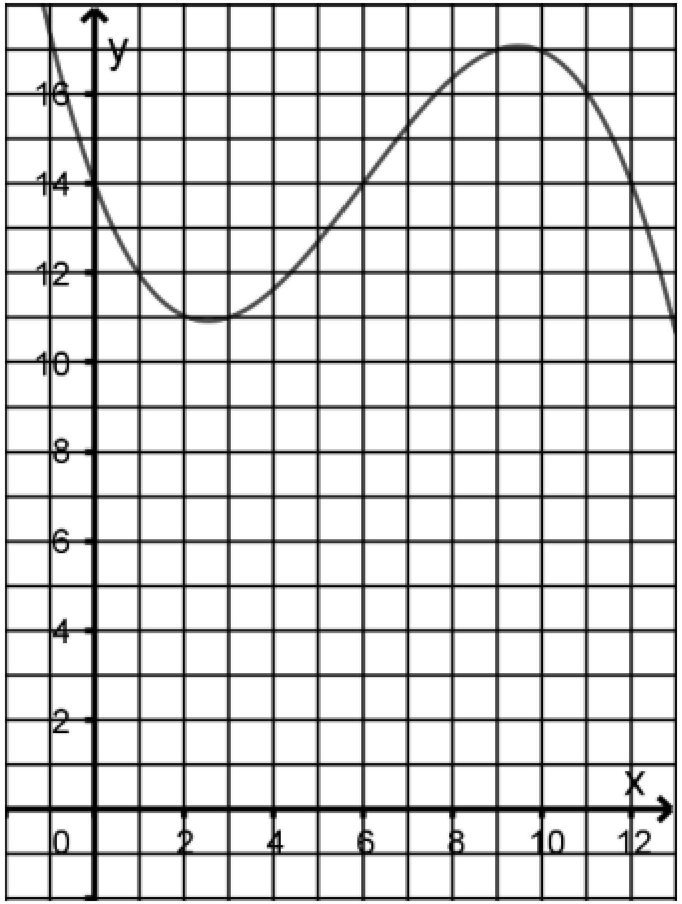
KURVENDISKUSSION

b Die folgenden Rechnungen stellen in Verbindung mit der Abbildung die Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang dar:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \sqrt{12} \vee x = 6 + \sqrt{12}$$

$$g\left(6 + \sqrt{12}\right) - g\left(6 - \sqrt{12}\right) \approx 6{,}2$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.



ABI-Aufgabe 3/3

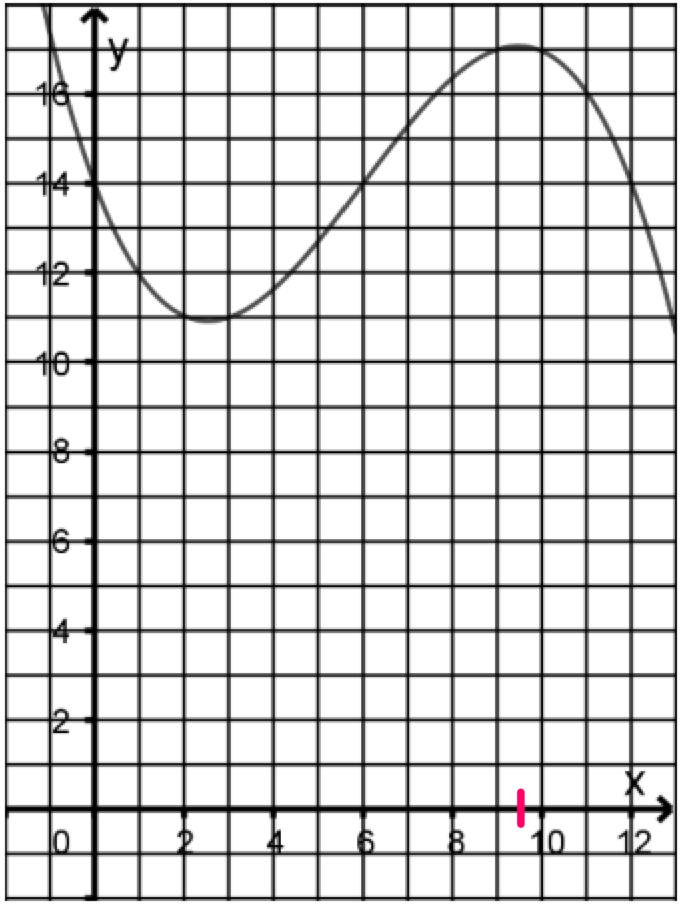
KURVENDISKUSSION

Zur Beschreibung des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur könnte im Modell anstelle von g auch die Funktion h mit $h(x) = -3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 14$ und $0 \le x < 12$ verwendet werden.

c Geben Sie die Tagesdurchschnittstemperaturen an, die im Modell unter Verwendung der Funktion h angenommen werden. Geben Sie für jede dieser Temperaturen an, wie oft sie angenommen wird.

d Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Im Modell ist unter Verwendung von h der Zeitraum steigender Tagesdurchschnittstemperatur etwa einen Monat kürzer als unter Verwendung von g.



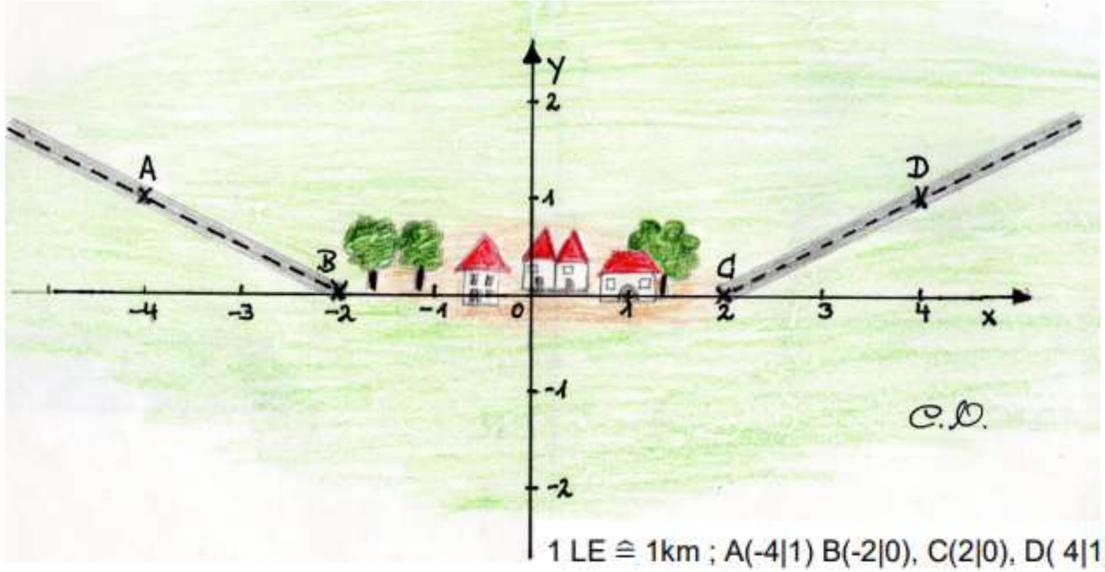
MODELLIERUNG VON FUNKTIONEN

TRASSIERUNG

Bei der Planung eines Neubaugebietes soll eine bestehende Sackgasse mit der zum Neubaugebiet führenden Straße verbunden werden.

Dabei ist es nötig, diese Verbindungsstraße möglichst „gut" an die bereits vorhandenen Straßenstücke anzuschließen.
Die Planer von Straßen NRW haben ein Koordinatensystem auf eine Planungskarte gelegt.

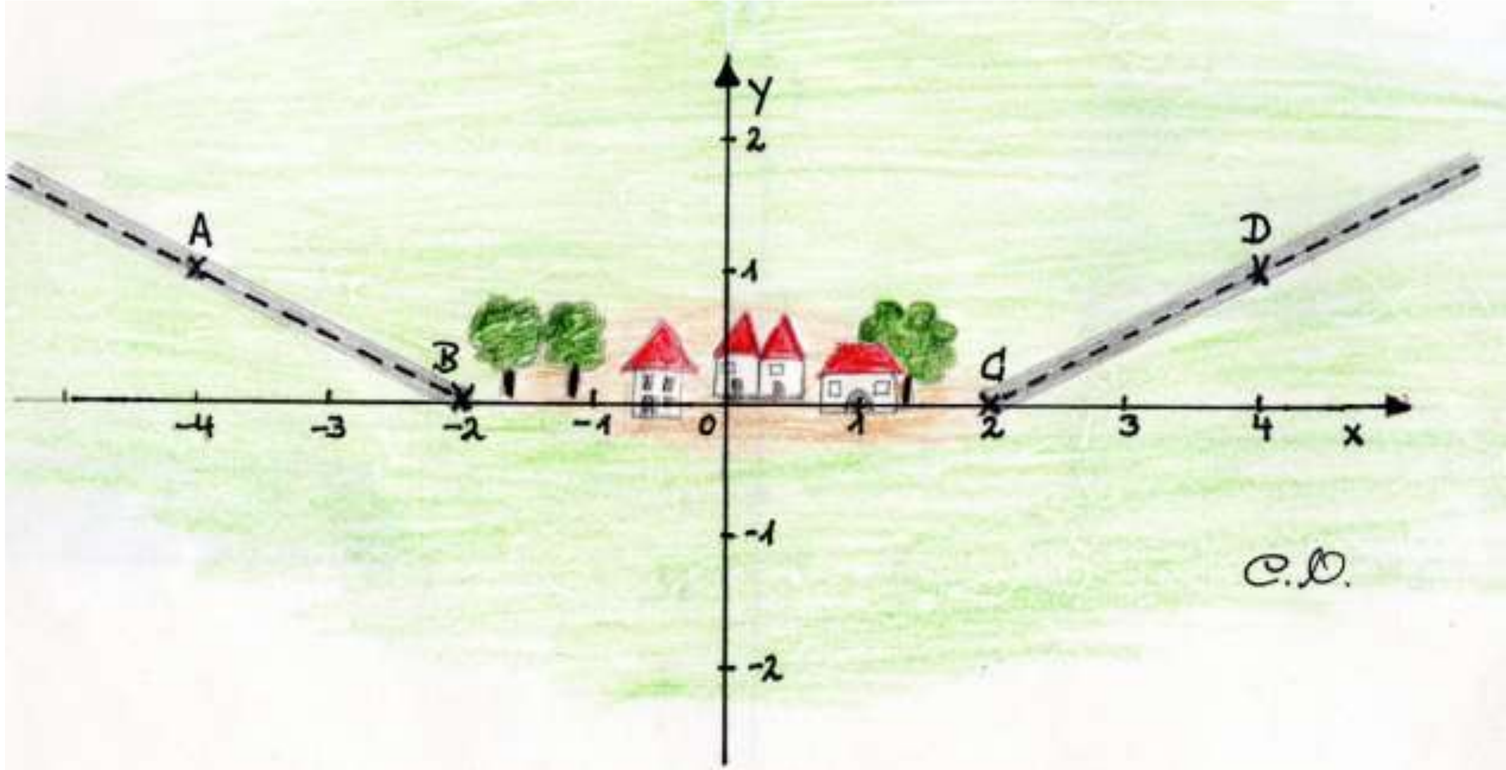
1) *Zeichnen Sie einen möglichen Straßenverlauf in das Koordinatensystem ein.*
2) *Nennen Sie Bedingungen, die für den Verlauf der geplanten Straße gelten müssen.*
3) *Geben Sie mindestens zwei geeignete Funktionstypen an, die den Verlauf der Verbindungsstraße beschreiben.*
4) *Bestimmen Sie geeignete ganzrationale Funktionen zweiten und dritten Grades mit dem GTR/CAS.*



1 LE ≙ 1km ; A(-4|1) B(-2|0), C(2|0), D(4|1)

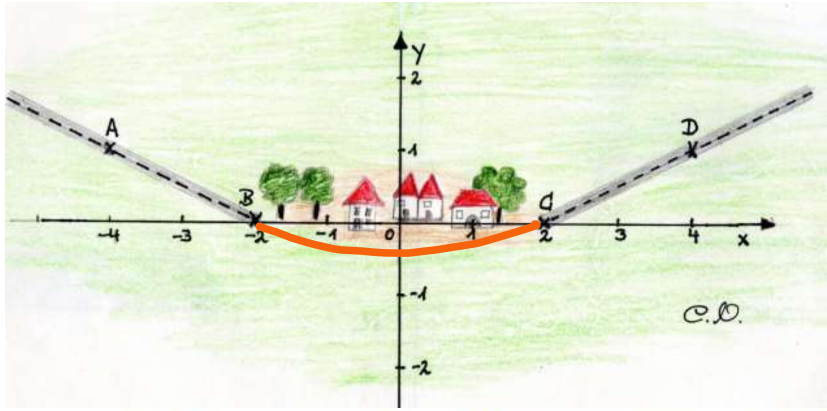
1) *Zeichnen Sie einen möglichen Straßenverlauf in das Koordinatensystem ein.*

2) *Nennen Sie Bedingungen, die für den Verlauf der geplanten Straße gelten müssen.*



3) *Geben Sie mindestens zwei geeignete Funktionstypen an, die den Verlauf der Verbindungsstraße beschreiben.*

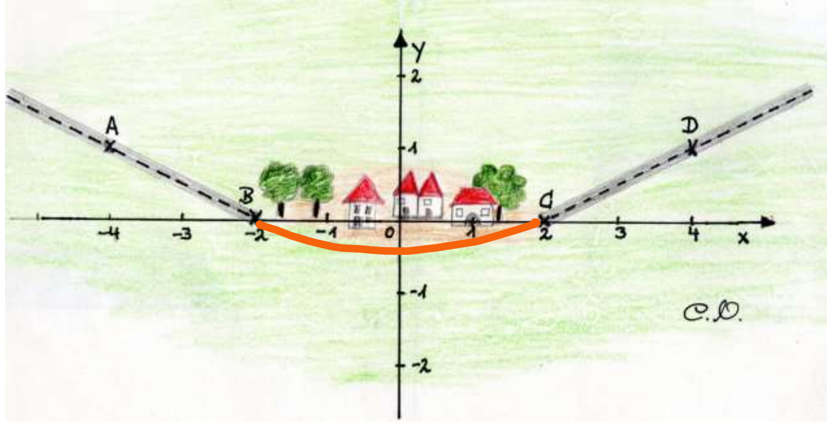
4) *Bestimmen Sie geeignete ganzrationale Funktionen zweiten und dritten Grades mit dem GTR/CAS.*



1 LE ≙ 1km ; A(-4|1) B(-2|0), C(2|0), D(4|1)

3) *Geben Sie mindestens zwei geeignete Funktionstypen an, die den Verlauf der Verbindungsstraße beschreiben.*

4) *Bestimmen Sie geeignete ganzrationale Funktionen zweiten und dritten Grades mit dem GTR/CAS.*



$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 12 & 4 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 12 & 4 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

MODELLIERUNG VON FUNKTIONEN

Informationen interpretieren

Bedingung	Gleichung
Der Punkt P(2|3) liegt auf dem Graphen von f.	$f(2) = 3$
… an der Stelle x=4 die Tangentensteigung -2 …	$f'(4) = -2$
… ein Hochpunkt/Tiefpunkt bei E(2|1) …	$f'(2) = 0\,;\, f(2) = 1$
… ein Wendepunkt W(-2|3) …	$f''(-2) = 0\,;\, f(-2) = 3$
… in der Nullstelle bei x=3 den Steigungswinkel 30° …	$f'(3) = \tan(30°)\,;\, f(3) = 0$
… geht durch den Ursprung …	$f(0) = 0$
… schneidet die x-Achse bei x=4 …	$f(4) = 0$
… schneidet die y-Achse bei y=2 …	$f(0) = 2$
… ist bei x=3 parallel zur Geraden y = 0,5x+2 …	$f'(3) = 0{,}5$
… die Wendetangente berührt den Graphen bei x=5 …	$f''(5) = 0$
… symmetrisch zur y-Achse	Nur gerade Exponenten oder $f(-x) = f(x)$
… punktsymmetrisch zum Ursprung	Nur ungerade Exponenten oder $f(-x) = -f(x)$

ABI-Aufgabe

LGS und Gauß-Verfahren

Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $A(3\,|\,6)$ die Tangente $y = 11x - 27$ und in $B(1\,|\,0)$ einen Wendepunkt?

ABI-Aufgabe

LGS und Gauß-Verfahren

Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $A(3\,|\,6)$ die Tangente $y = 11x - 27$ und in $B(1\,|\,0)$ einen Wendepunkt?

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & d + 3c + 27a + 9b & = & 6 \\
\text{II} & c + 27a + 6b & = & 11 \\
\text{III} & 6a + 2b & = & 0 \\
\text{IV} & d + \quad c + \quad a + \quad b & = & 0
\end{array}$$

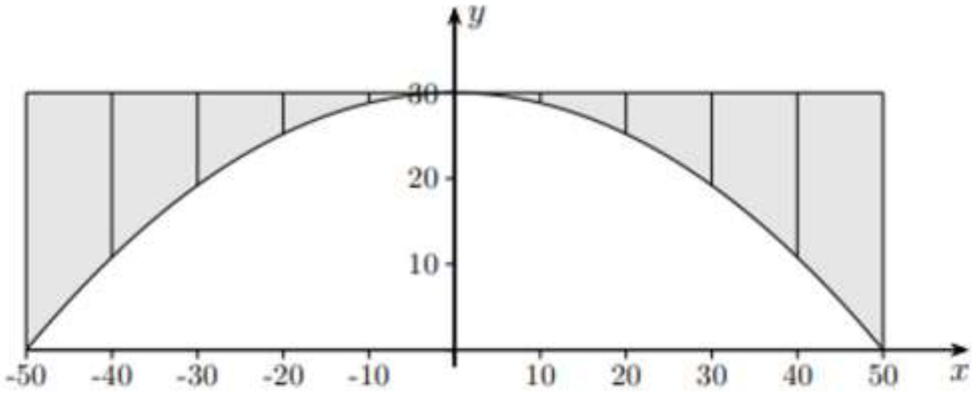
$$\begin{array}{llrcl}
\text{I} & & d + 3c + 27a + 9b & = & 6 \\
\text{II} & 0 & c + 27a + 6b & = & 11 \\
\text{III} & 0 & 6a + 2b & = & 0 \\
\text{IV'} & 0 & & = &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllrcl}
\text{I} & & & d + 3c + 27a + 9b & = & 6 \\
\text{II} & 0 & & c + 27a + 6b & = & 11 \\
\text{III} & 0 & 0 & 6a + 2b & = & 0 \\
\text{IV''} & 0 & 0 & & = &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllrcl}
\text{I} & & & & d + 3c + 27a + 9b & = & 6 \\
\text{II} & 0 & & & c + 27a + 6b & = & 11 \\
\text{III} & 0 & 0 & & 6a + 2b & = & 0 \\
\text{IV'''} & 0 & 0 & 0 & & = &
\end{array}$$

ABI-Aufgabe

Modellierung



1. Eine Brücke ist 30 m hoch und hat eine Spannweite von 100 m.
   Welche Parabel beschreibt die Krümmung des Stützbogens?

ABI-Aufgabe

Modellierung

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto ax^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1|0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c.

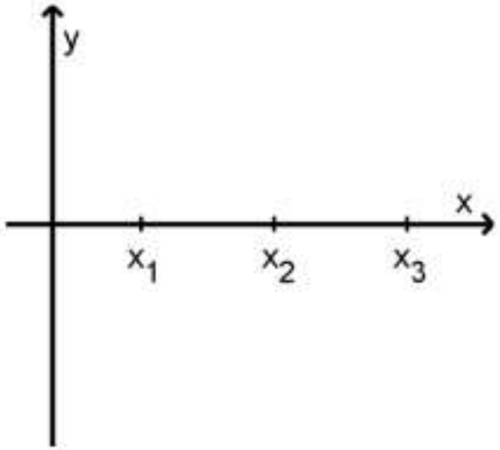
ABI-Aufgabe

Modellierung

Eine in IR definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.



a Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

b Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f.

Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Längsschnitts einer Wasserrutschbahn, die aus einem Startbogen, einem Mittelabschnitt und einem Auslaufbogen zusammengesetzt ist. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die x-Achse beschreibt die Horizontale.

Die Rutschbahn weist in ihrem Längsschnitt weder eine Sprungstelle noch einen Knick auf. Der Auslaufbogen geht in seinem Endpunkt, der im Modell durch den Punkt C dargestellt wird, ohne Knick in die Horizontale über.

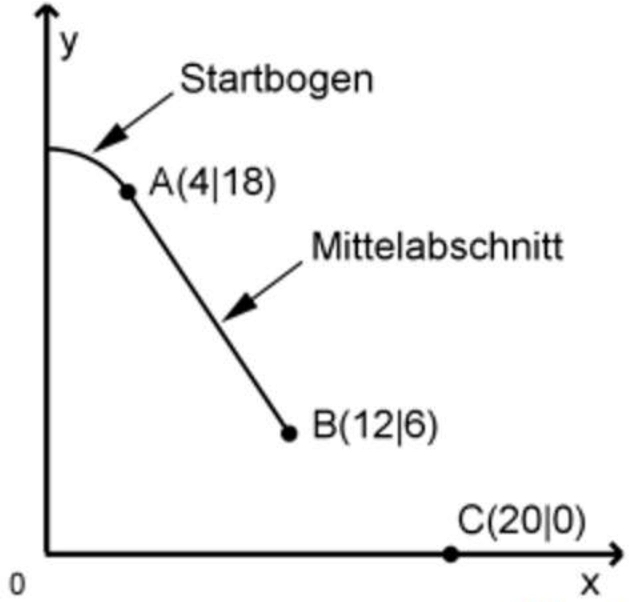


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Gerade, mithilfe derer der Mittelabschnitt beschrieben werden kann, sowie die Größe des Neigungswinkels dieses Abschnitts der Rutschbahn gegenüber der Horizontalen.

b Der Auslaufbogen lässt sich mithilfe einer quadratischen Funktion f beschreiben. Bestimmen Sie eine Gleichung von f.

ABI-Aufgabe

Modellierung

Aufgabe A 1.1

Der Graph G_f einer auf $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion dritten Grades f besitzt im Ursprung des Koordinatensystems eine Tangente mit der Gleichung $y = 2{,}25x$.

a) Desweiteren ist $A(4|1)$ ein Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f. Bestimmen Sie anschließend die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.
$\left[\text{Zur Kontrolle: } f(x) = 0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x\right]$ *(4 VP)*

OPTIMIERUNGSAUFGABEN

KURVENDISKUSSION

Ziel bei **Optimierungsaufgaben** ist, den optimalen (also minimalen oder maximalen) Wert für eine Kenngröße zu bestimmen, indem der Extrempunkt der zugehörigen Zielfunktion bestimmt wird.

Vorgehen:

(1) Hauptbedingung

Formel der Größe, die optimiert werden soll $A = \frac{a \cdot b}{2}$

(2) Nebenbedingungen

Wie hängen die Variablen der Hauptbedingung von der Zielvariablen ab? $a = u$

$\text{b} = f(u) = -\frac{1}{12}u^3 + \ldots$

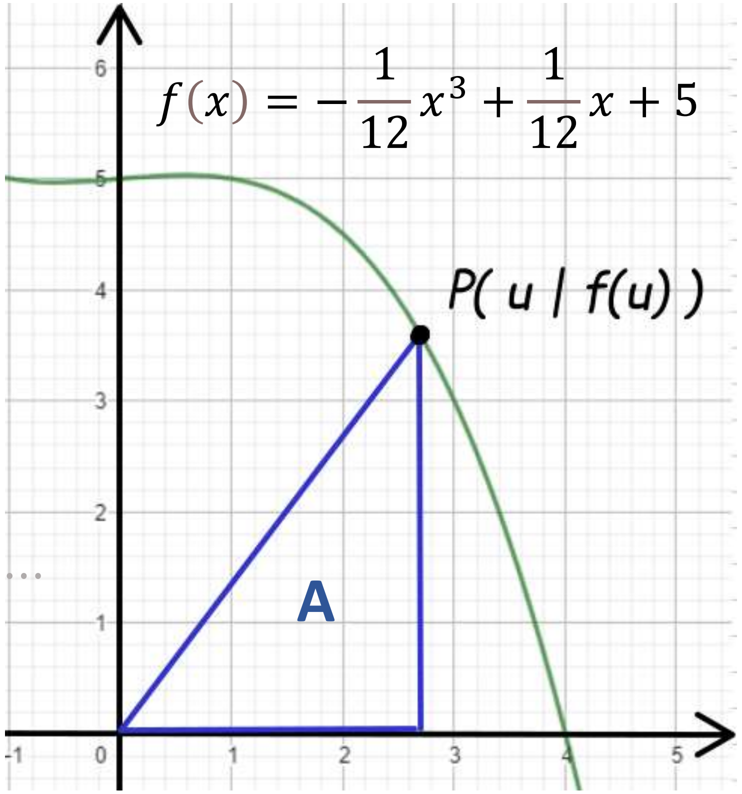
(3) Zielfunktion

nur noch von der Zielvariable abhängige Haupt-bedingung $A(u) = \frac{u \cdot f(u)}{2} = -\frac{1}{24}u^4 + \cdots$

(4) Maximum der Zielfunktion berechnen:

Extrempunkt $A'(u) = 0$

$A''(u) < 0$, also HP



OPTIMIERUNGSAUFGABEN

KURVENDISKUSSION

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen G_f.

Für jeden Wert $k > 0$ legen die auf G_f liegenden Punkte $P_k(-k \mid f(-k))$ und $Q_k(k \mid f(k))$ gemeinsam mit dem Punkt $R(0 \mid 1)$ ein gleichschenkliges Dreieck P_kQ_kR fest.

a) Berechnen Sie für $k = 2$ den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_2Q_2R (vgl. Abbildung 3).

Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks P_kQ_kR allgemein durch den Term $A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann.

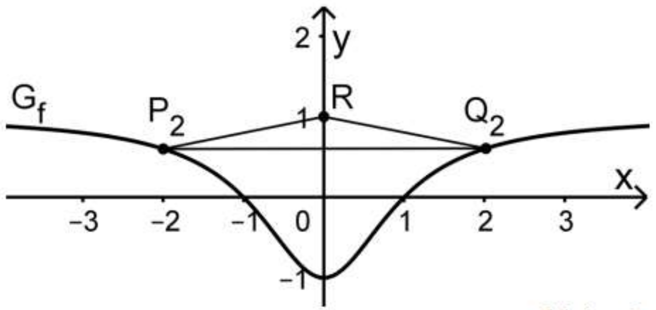


Abb. 3

(1) Hauptbedingung:

(2) Nebenbedingungen:

(3) Zielfunktion:

A(k) =

Zielfunktion: $A(k) = \dfrac{2k}{k^2+1}$

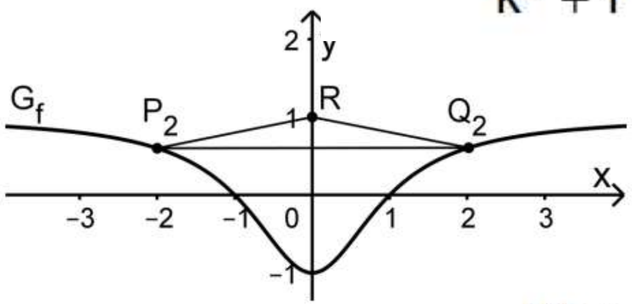


Abb. 3

b) Zeigen Sie, dass es einen Wert von $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von k sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_kQ_kR.

(4) Maximum der Zielfunktion berechnen:

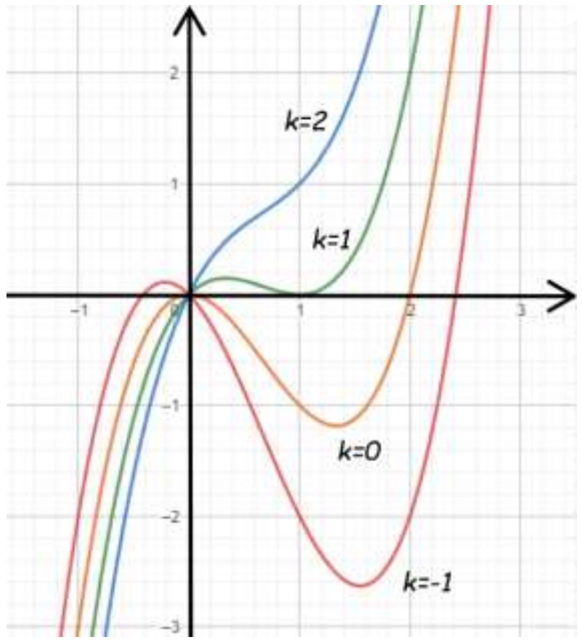
SCHARFUNKTIONEN

KURVENDISKUSSION

Funktionsscharen (Scharfunktionen) sind Funktionen mit veränderbaren Parametern.

Vorgehen:

- Ist der Parameterwert vorgegeben, muss er eingesetzt werden
  - Bsp. k = 5: $f_k(x) = 3x^2 - kx,\ k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f_5(x) = 3x^2 - 5x$
- Beim integrieren/ableiten/… wird der Parameter wie eine konstante Zahl behandelt
  - Bsp.1: $f_k(x) = k \cdot x^3 \ \Rightarrow\ f_k'(x) = 3k \cdot x^2$
  - Bsp.2: $\int_0^a (2x^2 - ax)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a = \left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{a}{2} \cdot a^2\right) - 0 = \frac{a^3}{3}$
- Der Parameter beeinflusst die Lage von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten, Grenzverhalten etc.



$f_k(x) = x^3 - 2x^2 + kx$

SCHARFUNKTIONEN

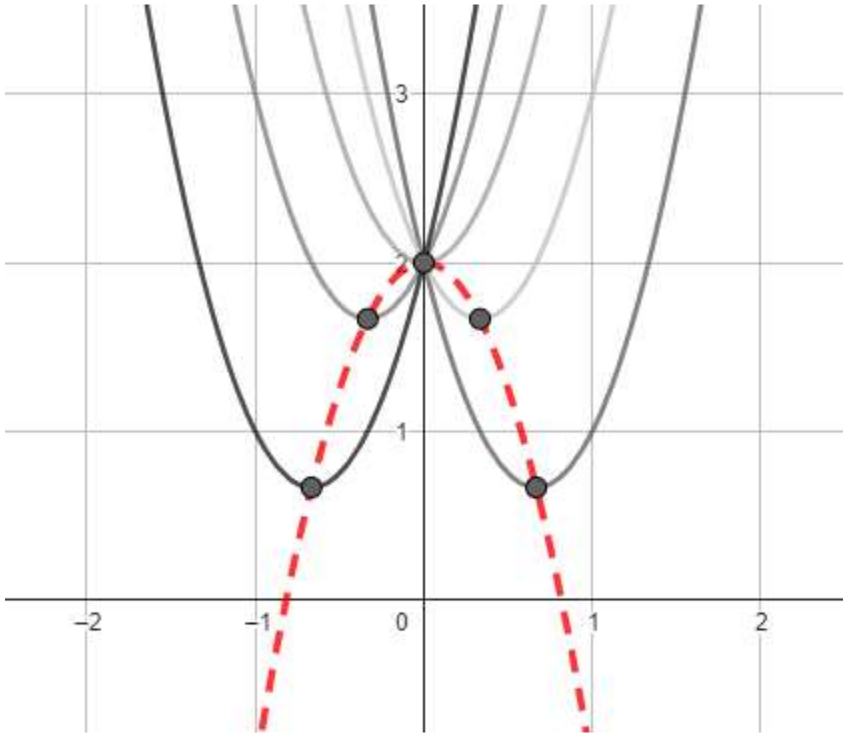
KURVENDISKUSSION

Ortskurven sind Graphen, auf welchen alle Punkte mit derselben Eigenschaft (Hochpunkte, Tiefpunkte, oder Wendepunkte) einer Funktionenschar liegen.

Vorgehen (Bsp. TP von $f_a(x) = 3x^2 + 2ax + 2$):

- Tiefpunkt berechnen $\quad$ TP $\left(-\frac{a}{3} \mid -\frac{a^2}{3} + 2\right)$
- x-Koordinate nach Parameter umstellen $\quad x = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = -3x$
- In y-Koordinate einsetzen

$$y = -\frac{a^2}{3} + 2 =$$



$f_k(x) = 3x^2 + 2ax + 2$

ABI-Aufgabe

SCHARFUNKTIONEN

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_a : x \mapsto (x^2 - x - a) \cdot e^{-x}$ gegeben.

a Berechnen Sie den Abstand der beiden Extrempunkte des Graphen von h_1.

b Für jeden Wert von a mit $a > -\frac{5}{4}$ hat der Graph von h_a zwei Extrempunkte. Bestimmen Sie die x-Koordinaten dieser beiden Extrempunkte in Abhängigkeit von a.

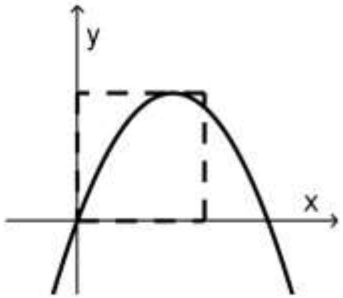
ABI-Aufgabe

SCHARFUNKTIONEN

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

a Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

b Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.



ABI-Aufgabe

SCHARFUNKTIONEN

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a Das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ ist abhängig von k. Geben Sie die dabei auftretenden Fälle des Verhaltens und für diese Fälle jeweils einen passenden Wert von k an. Begründen Sie jeweils die Angabe des Werts von k.

b Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

c Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h_k' bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h_k' Tangente an den Graphen von h_k ist.

Geschafft !

KURVENDISKUSSION

Du kannst jetzt

- vollständige Kurvenuntersuchungen
- Funktionen modellieren
- Mathematische Größen optimieren
- mit Scharfunktionen umgehen

Wie es weitergeht

ABI 2024 Vorbereitung

Üben, üben, üben 😉 !

Viel Erfolg bei Deinem ABI!